FORMULAIRE DE MATHS POUR LA PHYSIQUE

C. Pinettes, G. Rollet, G. Trambly

Université de Cergy-Pontoise
Département de Physique

Avertissement

Ce fascicule rappelle et résume les notions ou outils mathématiques utiles en physique pour les étudiants de niveau DEUG.
L'objectif de ce fascicule est double : énumérer les formules mathématiques à connaître et aider à bien les comprendre pour mieux les utiliser.

Il ne se substitue en aucun cas au cours de mathématiques. Nous nous contentons d'énumérer ici les définitions, les théorèmes importants et les propriétés fondamentales. Nous les illustrerons autant que possible par des figures et exemples.
Il est donc recommandé de se reporter aux cours de mathématiques niveau Terminale et DEUG pour les démonstrations.

Nous admettrons en particulier que la plupart des fonctions physiques –du moins celles vues en DEUG– sont de « bonnes » fonctions, continues, dérivables autant que l'on veut …
En particulier, nous ne considérerons que les fonctions des variables réelles et nous nous limiterons aux espaces euclidiens.

Dernière remarque, les physiciens notent indifféremment la variable et la fonction par la même grandeur.

Par exemple : $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

définit deux fonctions : $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *et* $g(r,\theta) = r$

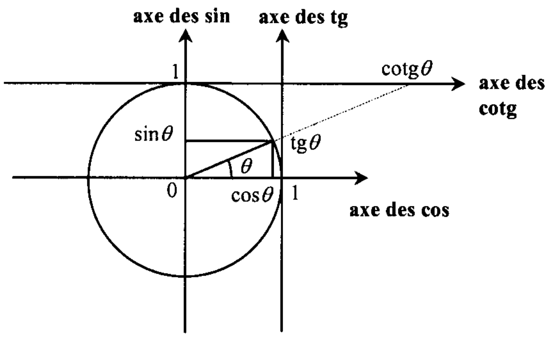
mais ces deux fonctions seront notées par la même fonction par les physiciens :
Par exemple $d = d(x,y) = d(r,\theta)$.

Les auteurs.

TABLE

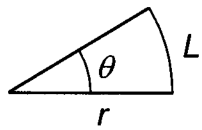
1. TRIGONOMETRIE

Le cercle unitaire (de rayon 1) permet de représenter géométriquement les différentes fonctions trigonométriques[1].



1.1. DEFINITION DE L'ANGLE EN RADIANS

$$\boxed{\theta(rad) = \frac{L}{r}}$$

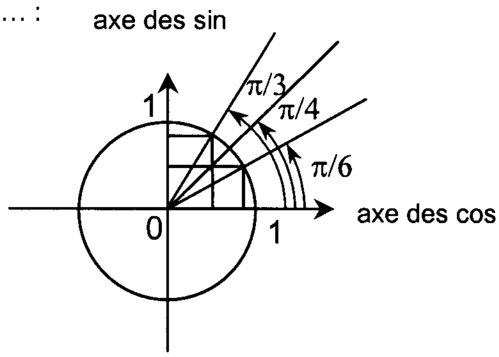


L'angle d'ouverture d'un demi-arc de cercle définit π.

Valeurs pour les angles particuliers

On retrouve les valeurs pour les angles 0, $\pi/6$, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$ etc… :

θ(rad)	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0



Relations entre les angles

On retrouve aussi facilement les relations trigonométriques suivantes dans le cercle unitaire :

$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

$\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$
$\sin(\pi/2 + \theta) = \cos(\theta)$ $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$

[1] Notation anglo-saxonne : tan pour la tangente.

1.2. RELATIONS TRIGONOMETRIQUES [2]

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ (Cf. Pythagore) $\quad 1+\mathrm{tg}^2\, a = \dfrac{1}{\cos^2 a} \quad 1+\mathrm{cotg}^2\, a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ [3] $\quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)) \quad \sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$

$\mathrm{tg}(a \pm b) = \dfrac{\mathrm{tg}a \pm \mathrm{tg}b}{1 \mp \mathrm{tg}a\, \mathrm{tg}b}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos[(p+q)/2] \cos[(p-q)/2] \quad \cos p - \cos q = -2 \sin[(p+q)/2] \sin[(p-q)/2]$

$\sin p \pm \sin q = 2 \sin[(p\pm q)/2] \cos[(p\mp q)/2]$

$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \sin 2a = 2 \cos a \sin a$

$\mathrm{tg}2a = 2\, \mathrm{tg}a /(1- \mathrm{tg}^2 a)$

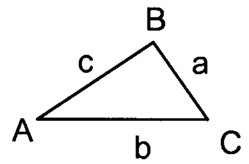
1.3. RELATION DANS UN TRIANGLE

Triangle quelconque [4]

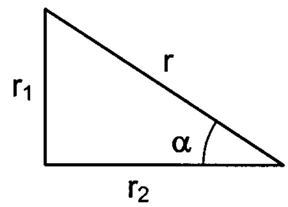
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ si les angles sont en radians.

Loi des sinus : $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}}$

Loi des cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$



Triangle rectangle



$r^2 = r_1^2 + r_2^2$ (Pythagore [5])

$\sin \alpha$ = côté opposé / hypoténuse = r_1 / r

$\cos \alpha$ = côté adjacent / hypoténuse = r_2 / r

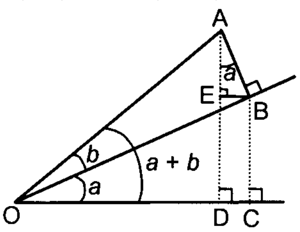
$\mathrm{tg}\, \alpha$ = côté opposé / côté adjacent = r_1 / r_2

où r_1, r_2 et r sont des longueurs et $0 \le \alpha \le \pi/2$.

---

2 On peut retrouver ces formules à l'aide des exponentielles (formules d'Euler).

3 On peut retrouver ces formules géométriquement par exemple pour $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$:
Choisissons OA=1
$OB = 1 \cos b$, $AB = 1 \sin b$ *et* $OD = 1 \cos(a + b)$
$OC = OB \cos a = \cos b \cos a$
$DC = EB = AB \sin a = \sin b \sin a$
$\cos(a+b) = OD = OC - DC = \cos b \cos a - \sin b \sin a$

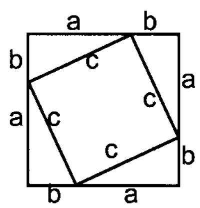


4 Notation : $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ désignent les angles directs *CAB, ABC et BCA*.

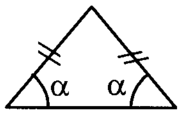
5 On peut retrouver la formule de Pythagore en considérant la figure suivante.

L'aire du grand carré est $(a + b)^2$, c'est aussi
l'aire du petit carré + l'aire des 4 triangles rectangles

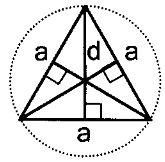
donc $(a + b)^2 = c^2 + 4\,(ab / 2)$ soit $c^2 = a^2 + b^2$



Relations dans un triangle isocèle



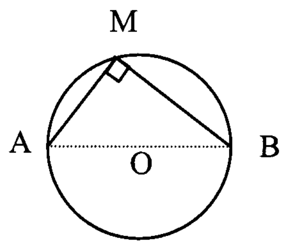
Relations dans un triangle équilatéral

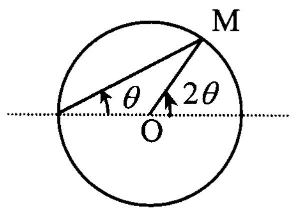


$d = \frac{2}{3}$ de la hauteur

s'inscrit dans un cercle de centre le centre du triangle

1.4. RELATIONS DANS LE CERCLE





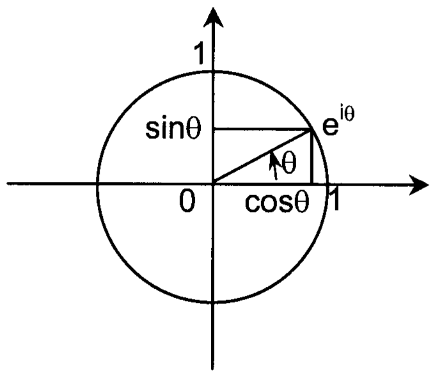
1.5. ECRITURE AVEC LES COMPLEXES

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (θ est un réel)

formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \ ;$$

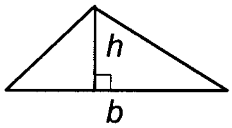
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



2. SURFACES, VOLUMES A CONNAÎTRE

Triangle

Surface = ½ × hauteur × base = $\dfrac{hb}{2}$



Cercle

Périmètre = $2\pi R$

Disque

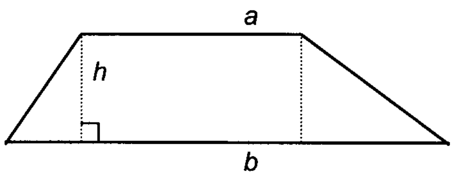
Surface = πR^2

Sphère

Surface = $4\pi R^2$

Volume = $\dfrac{4}{3}\pi R^3$

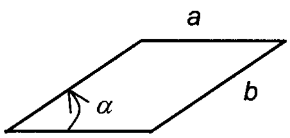
Trapèze



Surface = $ha + \dfrac{h(b-a)}{2} = h\dfrac{a+b}{2}$

Parallélogramme

Surface = $ab\sin\alpha$



3. SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

Suite arithmétique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Somme des N premiers termes :

$$S_N = u_1 + u_2 + \ldots + u_N = (u_1 + u_N)N/2$$

$$\boxed{= \frac{1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier}}{2} \times \text{nombre de termes}}$$

Suite géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r\,u_n \quad et \quad u_n = r^n u_0$$

où r est la raison de la suite.

Somme des N premiers termes (si $r \neq 1$) :

$$S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_{N-1} = \frac{u_0 - r\,u_{N-1}}{1-r}$$

$$\boxed{= \frac{\text{1er terme - dernier * raison}}{1 - \text{raison}}}$$

4. LES NOMBRES COMPLEXES

Définition

$$\boxed{z = a + ib = \rho\, e^{i\theta}}$$

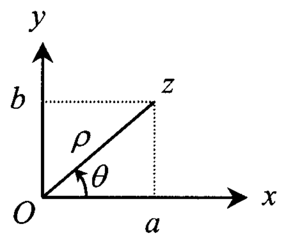
où a, b, ρ et θ sont des réels, ρ étant ≥ 0.

a = *partie réelle* de z ; b = *partie imaginaire* de z
ρ = *module* de z = $|z|$; θ = *argument* de z

Relations entre les deux écritures

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \rho \cos\theta$$
$$b = \rho \sin\theta$$

Représentation géométrique : le plan complexe



Complexes conjugués

On note $\bar{z} = a - ib = \rho\, e^{-i\theta}$ le <u>conjugué</u> de $z = a + ib = \rho\, e^{+i\theta}$

$$\bar{\bar{z}} = z$$
$$\rho^2 = |z|^2 = z\,\bar{z}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}}$$

Propriétés du nombre i : $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ donc $i^2 = -1$ et $\frac{1}{i} = -i$

Opérations

Addition : $z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$

Multiplication : $z\,z' = \rho\rho'\, e^{i\,(\theta+\theta')} = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

Racines 3$^{\text{ème}}$ de l'unité

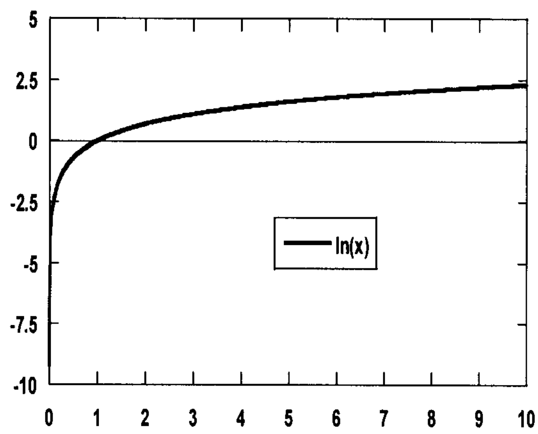
Les solutions dans le plan complexe de : $z^3 = 1$
sont : $1, j, j^2$, avec $j = e^{i2\pi/3}$.

On a : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

5. FONCTIONS ELEMENTAIRES

5.1. LOGARITHME



Définition $x > 0,\ \ln x = \log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$

Propriétés $\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b|$
$\ln|a/b| = \ln|a| - \ln|b|$
$\ln e = 1$ $(e = 2.71828\ldots)$
$\ln 1 = 0$

Limites $\ln x \underset{x\to 0^+}{\to} -\infty$

$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\forall \alpha > 0$, $x^\alpha \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

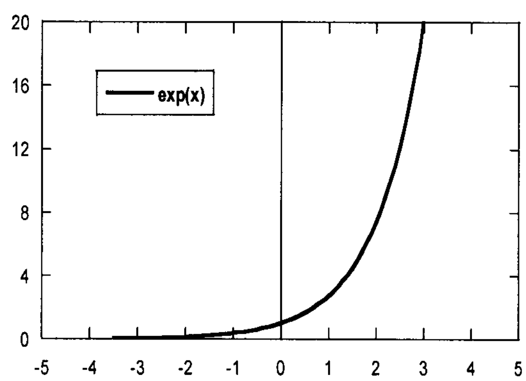
$\ln x << x^\alpha$ en $+\infty$

Pour n entier $\to +\infty$: $(\ln n)^\beta << n^\alpha << k^n << n!$ $\forall \alpha > 0,\ \beta > 0,\ k > 1$,

$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ ou $\frac{\ln n!}{n} \approx \ln n - 1$ (formules de Stirling)

Logarithme décimal $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

5.2. EXPONENTIELLE



Définition x réel, $y > 0$, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

Propriété $e^{\ln y} = y$

Limites $\forall \alpha$ réel,

- $\frac{e^x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
- $x^\alpha e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
- $x^\alpha << e^x$ en $+\infty$

Puissance

si $x > 0$, α réel, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

5.3. FONCTIONS HYPERBOLIQUES

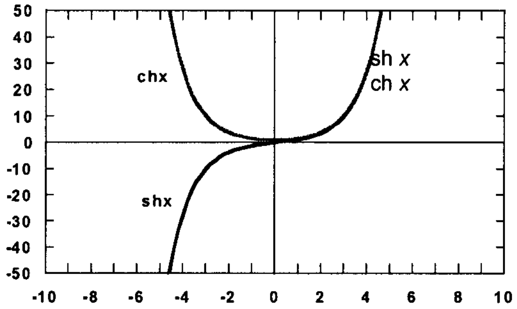
Définitions[6]

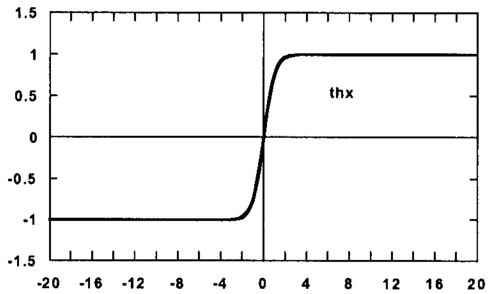
$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ cosinus hyperbolique

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ sinus hyperbolique

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ tangente hyperbolique

Courbes





Quelques relations à connaître

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

$$\text{ch}\, x = \cos(i x) \qquad \cos\theta = \text{ch}(i\theta)$$
$$\text{sh}\, x = -i \sin(i x) \qquad \sin\theta = -i\, \text{sh}(i\theta)$$
$$\text{th}\, x = -i\, \text{tg}(i x) \qquad \text{tg}\theta = -i\, \text{th}(i\theta)$$

Des relations trigonométriques, on déduit les relations pour les fonctions hyperboliques.

Par ex. : le développement limité[7] de $\sin x$ en 0 étant : $\sin x = x - x^3 / 3! + \ldots$

On en déduit celui de $\text{sh}\, x$ en 0 : $\text{sh}\, x = -i \sin i x = -i\,(i x - (i x)^3 / 3! + \ldots) = x + x^3 / 3! + \ldots$

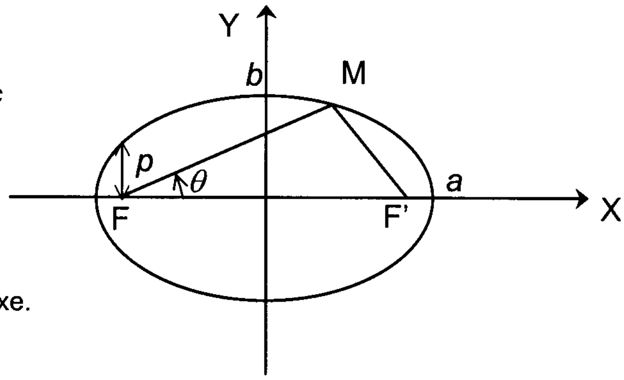
[6] Notations anglo-saxonnes : cosh, sinh, tanh
[7] Voir chapitre « développements limités » (chapitre 12 page 45)

6. LES CONIQUES

6.1. ELLIPSE

Définition

Lieu des points tels que : $MF + MF' = \text{cste} = 2a$,
F et F' étant les foyers de l'ellipse tels que : $FF' = 2c$
Avec $a > c$.



Equation cartésienne $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

avec $b^2 = a^2 - c^2$.
si $a > b$, a est le demi-grand axe et b le demi-petit axe.

Rq. : Si $F = F'$, $c = 0$, $b = a \rightarrow$ cercle.

Equation en polaire $$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

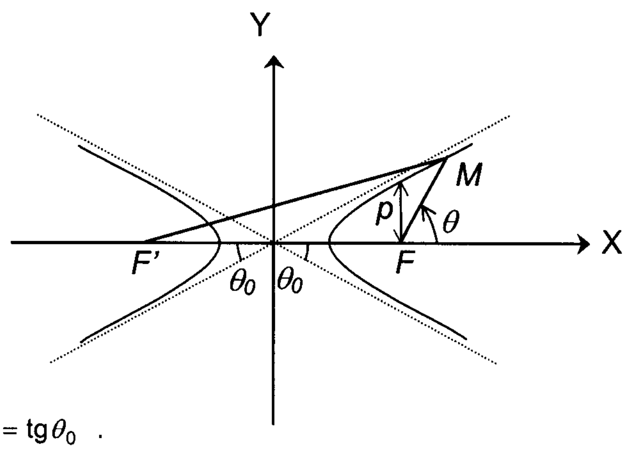
où $p = b^2/a$ = *paramètre* de l'ellipse,
et $e = c/a$ = *excentricité* de l'ellipse ($e < 1$).

Equation paramétrique $x = a \cos \tau$
$y = b \sin \tau$

6.2. HYPERBOLE

Définition

Lieu des points tels que : $| MF - MF' | = \text{cste} = 2a$,
F et F' étant les foyers de l'hyperbole tels que :
$FF' = 2c$, avec $a < c$.



Equation cartésienne $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

avec $b^2 = c^2 - a^2$.

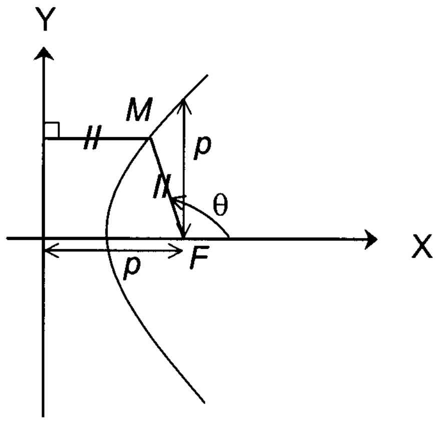
Asymptotes : $x, y >> a, b \rightarrow \frac{x^2}{a^2} \approx \frac{y^2}{b^2}$ soit $\left|\frac{y}{x}\right| \approx \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\theta_0$.

Equation en polaire $$\rho = \frac{p}{\pm 1+e\cos\theta}$$

où + pour branche de gauche et – pour branche de droite.
où $p = b^2/a$ = *paramètre* de l'hyperbole,
et $e = c/a$ = *excentricité* de l'hyperbole ($e > 1$).

Equation paramétrique $x = a \,\mathrm{ch}\, \tau$
$y = b \,\mathrm{sh}\, \tau$

6.3. PARABOLE



Définition

Lieu des points équidistants du foyer F et de la droite Δ.
Situation limite entre l'ellipse et l'hyperbole.

Equation cartésienne $\boxed{y^2 = 2p\,x}$

où p est la position du foyer.

Equation en polaire $\rho = \dfrac{p}{1+\cos\theta}$

où p = *paramètre* de l'hyperbole,
et e = 1 = *excentricité* de la parabole.

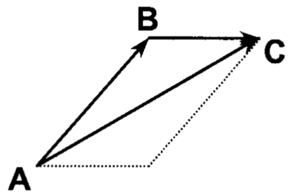
7. CALCUL VECTORIEL

Grandeur vectorielle

- définie par une orientation (direction + sens) et un nombre positif (norme)
- vecteur unitaire : de norme égale à 1.

7.1. OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES VECTEURS

Somme vectorielle



$$\boxed{\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}$$ (relation de Chasles)

→ construction d'un parallélogramme

Propriétés

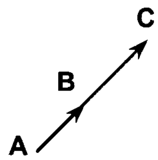
- associativité : $(\vec{V}_1+\vec{V}_2)+\vec{V}_3=\vec{V}_1+(\vec{V}_2+\vec{V}_3)$
- commutativité : $\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{V}_2+\vec{V}_1$

Remarque

en général, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \le \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, égalité si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont parallèles et de même sens.
dit autrement : le chemin le plus court est une droite.

Multiplication par un scalaire

Si A, B et C sont sur une même droite :



cas λ>0

$$\boxed{\overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{AB}}$$ avec λ réel.

→ $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=|\lambda|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

même sens si λ>0, de sens opposé sinon.

Propriétés : double distributivité

$$(\lambda_1+\lambda_2)\vec{V}_1=\lambda_1\vec{V}_1+\lambda_2\vec{V}_1$$

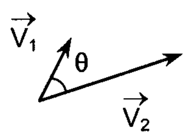
$$\lambda(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=\lambda\,\vec{V}_1+\lambda\,\vec{V}_2$$

associativité

$$(\lambda\mu)\vec{V}=\lambda(\mu\vec{V})$$

$$1\vec{V}=\vec{V}$$

7.2. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS



Comme son nom l'indique c'est un SCALAIRE (réel).

Définition

$$\boxed{\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2=\left\|\vec{V}_1\right\|\left\|\vec{V}_2\right\|\cos\theta}$$

Remarque 1 : pas besoin d'orienter θ car $\cos(\theta)=\cos(-\theta)$.
Remarque 2 : le produit scalaire ne dépend pas du choix de la base.

Cas particuliers

- $\boxed{\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0}$

$\vec{V} \cdot \vec{V} = \vec{V}^2 = \|\vec{V}\| \, \|\vec{V}\| \cos 0 = \|\vec{V}\|^2 = V^2$.

- si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont 2 vecteurs unitaires : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \, \|\vec{u}_2\| \cos\theta = \cos\theta$.
- $\forall \, \vec{u}$ unitaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = u^2 = \|\vec{u}\|^2 = 1$

<u>*Propriétés*</u>

- commutativité : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$
- distributivité : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$

$(\lambda \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \lambda (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \cdot (\lambda \vec{V}_2)$

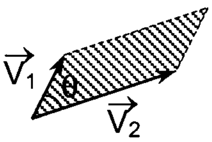
7.3. PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS

<u>*Définition*</u>

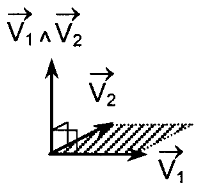
$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2}$$

Notation anglo-saxonne : $\vec{V} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$

Comme son nom l'indique c'est un VECTEUR,



- de norme : $\boxed{\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \, \|\vec{V}_2\| \, |\sin\theta|}$ = aire du parallélogramme



- de direction : **perpendiculaire** au plan $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$
- de sens : *convention* dite du « **trièdre direct** »

ou encore <u>règle de la main droite</u> (main droite dans sens de $\vec{V}_1$, fermer la main dans sens de $\vec{V}_2$, le pouce indique $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$) ou

<u>règle des trois doigts</u> (de la main droite faisant des angles droits : le pouce le long de $\vec{V}_1$, l'index le long de $\vec{V}_2$, le majeur indique $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$).

Remarque. : le produit vectoriel ne dépend pas du choix de la base.

Cas particuliers $\boxed{\vec{V}_1 \, // \, \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}}$

<u>*Propriétés*</u>

- anti-commutativité : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- distributivité : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$

$(\lambda \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \lambda (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \wedge (\lambda \vec{V}_2)$

- $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \, \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \, \vec{C}$

7.4. PRODUIT MIXTE

Définition

Comme son nom l'indique, c'est une combinaison des deux opérations précédentes[8] :

$$\left[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right] = \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) \cdot \vec{V}_3$$

C'est un SCALAIRE.

Interprétation géométrique

C'est le volume « orienté » du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

« Orienté » veut dire :
- > 0, si sens direct
- < 0, si sens inverse
- = 0, si coplanaires

Propriétés

- Invariant par permutation circulaire des trois vecteurs :

$$\left[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right] = \left[\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1\right] = etc \ldots$$

- Change de signe si on inverse deux vecteurs.

[8] Le produit mixte peut aussi s'écrire comme le déterminant de la matrice dont les vecteurs colonnes sont les 3 vecteurs du produit mixte.

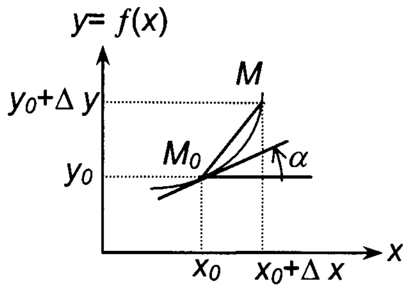
8. FONCTIONS SCALAIRES D'UNE SEULE VARIABLE REELLE

On se limite ici aux fonctions réelles d'une seule variable réelle.

8.1. DERIVEES

a) Dérivée première

On considère deux points $M_0(x_0,y_0)$ et $M\,(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ sur la courbe $y = f(x)$:



Pente de droite M_0M : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

<u>Dérivée</u> de f en x_0

si la limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers 0 ($M \to M_0$) existe,

la fonction f est dite dérivable en x_0 et sa dérivée vaut :

$$\boxed{y'=f\,'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

On la note aussi : $f\,'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Signification

dérivée en $x_0 = f\,'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ = pente de la tangente en M_0.

<u>Dérivées de base à connaître</u>

f	$f\,'$
x^α (α réel)	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$1+\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-1-\mathrm{cotg}^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{th}\, x$	$1/(\mathrm{ch}^2 x) = 1-\mathrm{th}^2 x$

Théorèmes généraux

$(\lambda f + g)' = \lambda f\,' + g\,'$ (λ = constante)

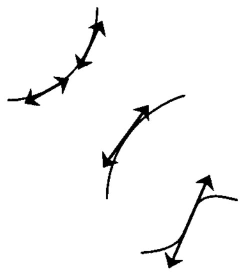
$(fg)' = f'g + f\,g'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$
$$\left(f[g(x)]\right)' = g'(x)\,f'[g(x)]$$
$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

b) Dérivée seconde

En dérivant encore une fois $f'(x)$ on obtient $f''(x)$.

Interprétation géométrique f'' renseigne sur concavité de la courbe $y = f(x)$



$f''(x) > 0$: la dérivée augmente
→ concavité vers le haut (convexe)

$f''(x) < 0$: la dérivée diminue
→ concavité vers le bas (concave)

$f''(x_0) = 0$ et change f'' de signe en x_0 : la tangente traverse la courbe
→ *point d'inflexion*

Extrema d'une fonction

Valeurs de f aux bornes et valeurs x_0 telles que $f'(x_0) = 0$.

Signe de f'' dit :
- $f''(x_0) < 0$ maximum local en x_0
- $f''(x_0) > 0$ minimum local en x_0
- $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0: point d'inflexion en x_0 (x_0 n'est pas un extremum !)
- $f''(x_0) = 0$ et f'' ne change pas de signe en x_0: extremum en x_0, le signe de f'' au voisinage de x_0 permet savoir si c'est un minimum local ou un maximum local.

8.2. DIFFERENTIELLES

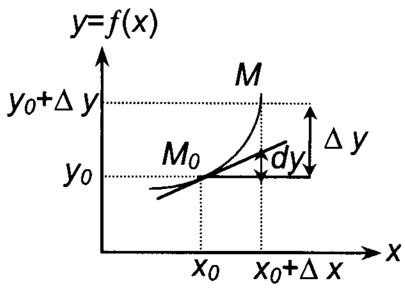
La fonction $f(x)$ est supposée dérivable. On reprend le schéma précédent, où Δx est l'accroissement de la variable x et Δy celui de la fonction y associée à Δx.

Définition et usage en physique

Posons : $\Delta f_{x_0} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Lorsque l'accroissement Δx est faible ($\Delta x \ll x_0$), on peut développer f au voisinage de x_0 en utilisant la formule de Taylor[9] :

$$\Delta f_{x_0} = f'(x_0)\,\Delta x + f''(x_0)\,\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_0)\,\frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots$$



La partie linéaire de ce développement est : $f'(x_0)\,\Delta x$.

Définition mathématique de la différentielle de f :

$$\mathrm{d}f_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0)\,\Delta x$$

[9] Voir chapitre « développements limités » (Chap. 12 page 45).

En physique, on note df la variation infinitésimale de f correspondant à la variation infinitésimale dx de x :

$$\mathrm{d}f = \lim_{\Delta x \to \mathrm{d}x} \Delta f$$

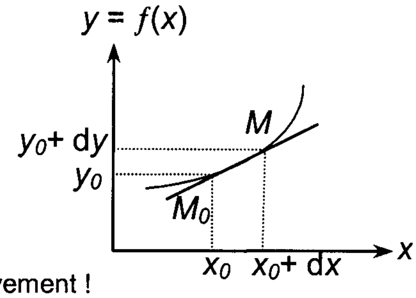
Soit :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f(x + dx) - f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x}$$

→ dx et dy sont donc des **accroissements élémentaires** des variables x et y.

En pratique : $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ *et* $\Delta x \approx \mathrm{d}x$ *lorsqu'on peut négliger les termes d'ordre* ≥ 2 *dans* Δf.

Lorsque $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ et $\Delta x \approx \mathrm{d}x$, on peut confondre la courbe et sa tangente.



D'où la notation : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)}$

Remarques - $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ étant des grandeurs (accroissements), ils ont *la même dimension* que les variables x et y respectivement !

et on peut les manipuler comme des réels : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

- le $\mathrm{d}x$ ici est le même que celui qui intervient dans le calcul d'une intégrale !

<u>*Propriétés*</u> : les mêmes que celles des dérivées

Linéarité : $\mathrm{d}(\lambda f + g) = \lambda\, \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$ (λ constant)

$$\mathrm{d}(f\,g) = \mathrm{d}f\, g + f\,\mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2}$$

$$\mathrm{d}[f(g)] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f'(g)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque : On note aussi la dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \neq \left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2$

Ex. 1 : Calcul d'erreur de l'énergie cinétique d'une voiture

m = 1000 kg et v = 20 m.s^{-1} ± Δv, Δv = 1 m.s^{-1}

$E_c = ½\, m\, v^2$ = ½ . 1000 . 400 = 2 10^5 J
E_c est comprise entre : ½ . 1000 . 19^2 J et ½ . 1000 . 21^2 J soit entre : 1.805 10^5 J et 2.205 10^5 J

Avec les différentielles : $\Delta v \approx \mathrm{d}v$ et $\Delta E_c \approx \mathrm{d}E_c$, car $\Delta v \ll v$
et donc : $\Delta E_c \approx ½\, 2mv\, \Delta v$
Soit : ΔEc = ½ . 2 . 1000 . 20 . 1 = 2 10^4 J
et Ec = 2 10^5 ± 2 10^4 J soit entre : 1.8 10^5 J et 2.2 10^5 J

8.3. PRIMITIVES (OU INTEGRALES INDEFINIES)

<u>*Définition*</u>

La primitive d'une fonction f(x) est la fonction F(x), telle que F'(x) =f(x). Si F(x) est continue $\boxed{F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Remarque : la primitive est définie à une constante additive près.

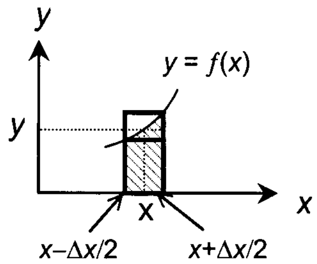
Propriétés $$\int [\lambda\, f(x) + g(x)]\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$ (λ = constante)

Primitives à connaître

f	F (à une constante près)
a	ax
x^α $(\alpha \neq -1)$	$x^{\alpha+1} / (\alpha + 1)$
$1 / x$	$\ln x$
$\sin(ax)$	$-\cos(ax) / a$
$\cos(ax)$	$\sin(ax) / a$
e^{ax}	e^{ax} / a
$1 / (1+x^2)$	$\mathrm{Arctg}x$
$1 / \cos^2 x$	$\mathrm{tg}x$
$1 / \sin^2 x$	$-\mathrm{cotg}x$

8.4. INTEGRALES DEFINIES

Notion d'integrale



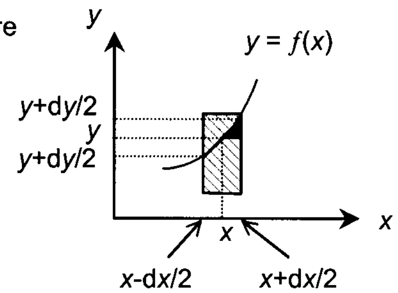
Soit ΔS l'aire sous la courbe $y = f(x)$ hachurée sur le dessin.
Elle est comprise entre les aires des rectangles inférieurs et supérieurs[10], soit :

$$f(x - \Delta x/2)\ \Delta x \leq \ \Delta S \leq f(x + \Delta x/2)\ \Delta x$$

$$f(x - \Delta x/2) \ \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x/2)$$

On a donc lorsque $\Delta x \to 0$: $\Delta S/\Delta x \to f(x)$, car f est continue ;
On retrouve la définition de la dérivée : $S'(x) = f(x)$.

Or si $\Delta x \to 0$:
alors Δx = dx et la courbe peut être approchée par sa tangente.



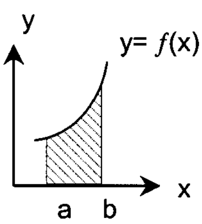
dS = aire élémentaire sous la courbe $y = f(x)$ ci-contre

$f(x)$ dx = aire hachurée sur la figure
= aire sous la courbe
– aire triangle hachuré
+ aire triangle noir

$$= dS - \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{2}\frac{dx}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{2}\frac{dx}{2}\right)$$

$= dS$

On a donc : $S(x) = \int dS = \int f(x)\,dx$



En conclusion :
On a $S'(x) = f(x)$ et $S(x) = \int f(x)\,dx$

Soit : $\boxed{S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C}$ = aire sous la courbe .

---

[10] On a supposé f croissante. Le raisonnement est le même si f est décroissante.

La constante additive, *C*, dépend de l'endroit où on commence à mesurer l'aire :

Si on veut mesurer l'aire entre les abscisses *a* et b :
S(a) = 0 donc *C = – F(a)*

et $S(b) = F(b) + C = \boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$

Remarque :

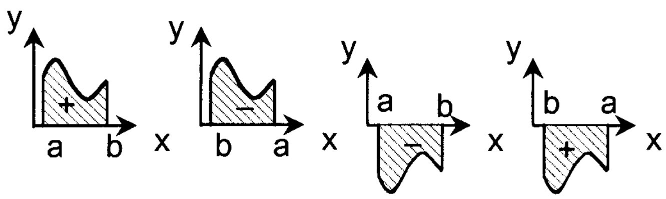
- il s'agit d'une *aire algébrique* [11] : $\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int_a^b \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$
- $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \int_0^{f(x)} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

<u>Propriétés</u> : $\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$

linéarité : $\int_a^b [\lambda\ f(x) + g(x)]\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ (λ=constante)

si $f \geq 0\ sur\ [a,b]\ alors\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ ($a < b$)

En particulier, cette intégrale de *a* à *b* est égale à l'aire sous la courbe au signe près :



si $f \leq g\ sur\ [a,b]\ alors\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

si *f* paire, $\int_{-a}^{+a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x$

si *f* impaire, $\int_{-a}^{+a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$

Changement de variable

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[u(t)]\, u'(t)\ \mathrm{d}t}$$

où : $x = u(t)$ et $\mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t$
$a = u(\alpha)\ et\ b = u(\beta)$

[11] algébrique : qui peut être positive ou négative.

Cas particulier important :

$$\boxed{\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u} \text{ soit } \int_a^b f[g]\,\mathrm{d}g = \int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u$$

en posant : $u = g(x)$ *et* $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}g$
$\alpha = g(a)$ *et* $\beta = g(b)$

Exemple : $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

On pose : $u = -x^2$. Et donc : du = - 2 x dx . $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}$

Intégration par parties

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = [\,f(x)g(x)\,]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\mathrm{d}x},$$

Exemple : $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

On pose : $g(x) = \cos^2 x$ et $f'(x) = \cos x$

On a donc : $g'(x) = -2\cos x \sin x$ et $f(x) = \sin x$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\cos^2 x \sin x\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\cos x\,\mathrm{d}x$$

On fait le changement de variable : $w = \sin x$ et $\mathrm{d}w = \cos x\,\mathrm{d}x$

Soit : $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 w^2\,\mathrm{d}w = \left[w^3/3\right]_0^1 = 1/3$.

Et : $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\cos x\,\mathrm{d}x = 2/3$.

Valeur moyenne

La valeur moyenne de f sur l'intervalle [a,b] : $< f > = \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

9. FONCTIONS SCALAIRES DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES

On s'intéresse ici aux fonctions de la forme $f(x, y, z)$ définies dans R^3 et infiniment dérivables.

9.1. DERIVEES PARTIELLES

Définition

Pour (y_0, z_0) donnés, la fonction $f(x, y_0, z_0)$ est une fonction de la seule variable x ;
si elle est dérivable en x_0, sa dérivée est la dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0, z_0), notée :

$$\boxed{f_x^{'}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}$$

La dérivée partielle f_x' est la dérivée de f par rapport à x en considérant les variables y et z constantes.
On définit de même f_y' et f_z'.

Elles peuvent admettre à leur tour des fonctions dérivées notées comme suit :
$f_x^{''}, f_{xy}^{''}, f_x^{'''}, \ldots, f_x^{(n)} \ldots$ ou bien, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \ldots$

Rq. : on peut aussi noter la dérivée partielle en rappelant le jeu de variables : $f_x^{'} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$.

Ex. : $f(x, y, z) = x \sin(y z^2)$

$f_x^{'} = \sin(y z^2)$; $f_y^{'} = xz^2 \cos(y z^2)$; $f_z^{'} = 2\, xyz \cos(y z^2)$;

$f_x^{''} = 0$; $f_y^{''} = - xz^4 \sin(y z^2)$; $f_z^{''} = 2\, xy \cos(y z^2) - 4\, xyz^2 \sin(y z^2)$;

$f_{xy}^{''} = z^2 \cos(y z^2)$; $f_{xz}^{''} = 2\, yz \cos(yz^2)$;

$f_{yx}^{''} = z^2 \cos(y z^2)$; $f_{yz}^{''} = 2\, xz \cos(yz^2) - 2\, xyz^3 \sin(yz^2)$;

$f_{zx}^{''} = 2\, yz \cos(yz^2)$; $f_{zy}^{''} = 2\, xz \cos(yz^2) - 2\, xyz^3 \sin(yz^2)$; etc…

Relation de Schwartz

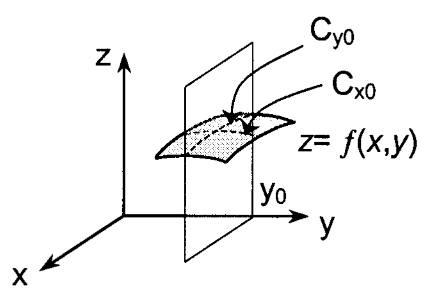
$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$ car f est une fonction de x et y.

Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction de deux variables

La fonction $z=f(x, y)$ est l'équation d'une surface (cf. figure).

Fixons d'abord y pour calculer $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y_0}$:

- on coupe la surface par un plan $y=y_0$=cste.
- l'intersection définit la courbe C_{y_0}.
- la tangente à C_{y_0} a pour pente $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y_0}$.



De même, si on fixe $x=x_0$=cste :

- on coupe la surface en une courbe C_{x_0}.

- la tangente à C_{x_0} a pour pente $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0}$.

Ces deux tangentes définissent le **plan tangent** à la surface $z=f(x,y)$ en (x_0, y_0).

Théorème des fonctions implicites

Soit l'équation suivante $f(x, y, z) = 0$.
On définit ainsi des fonctions implicites[12] : $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ et $z = z(x, y)$
On peut montrer que l'on a alors les relations suivantes[13] :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \\[2ex] \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \end{array}}$$

Application : Considérons la fonction implicite $x = x(y, z)$.
en dérivant la relation $f(x(y,z), y, z) = 0$ par rapport à y on obtient : $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = 0$,

de même la dérivant par rapport à z on obtient : $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = 0$

9.2. DIFFERENTIELLE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Définition

Soit f une fonction des trois variables x, y, z.
La différentielle de f est : $\boxed{df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z)}$

On peut expliciter l'expression de df en faisant un développement limité[14] en dx, puis dy, puis dz, et en ne gardant que les termes d'ordre < 2. En procédant ainsi, on ne fait varier qu'une seule variable à la fois : au premier ordre, on a donc les dérivées partielles premières.

$$\begin{aligned} f(x+dx, y+dy, z+dz) &= f(x, y+dy, z+dz) + f'_x\,dx \\ &= f(x,y,z+dz) + f'_y\,dy + f'_x\,dx \\ &= f(x,y,z) + f'_z\,dz + f'_y\,dy + f'_x\,dx \end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{df = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz}$

= variation de f lorsqu'on se déplace dans le plan tangent.

[12] Les physiciens notent la variable et la fonction par la même grandeur.
[13] La dernière relation peut se retrouver par des permutations des variables x, y z, en comptant l'indice de la dérivée partielle : x, y, z puis y, z, x puis z, x, y.
[14] Cf. chapitre « développements limités ».

Exemple : calcul d'erreur de l'énergie cinétique d'une voiture avec incertitude sur la vitesse et la masse

$m = 1000 \pm 50$ kg et $v = 20 \pm 1$ m.s^{-1}
$\Delta v \approx dv$, $\Delta m \approx dm$ et $\Delta E_c \approx dE_c$, car $\Delta v << v$ et $\Delta m << m$
$\Delta E_c \approx ½\, 2mv\, \Delta v + ½\, v^2\, \Delta m$, soit : $\Delta Ec \approx ½ . 2 . 1000 . 20 . 1 + 1/2 . 400 . 50 = 3\ 10^4$ J
et : $Ec \approx 2\ 10^5 \pm 3\ 10^4$ J soit entre : $1.7\ 10^5$ J et $2.3\ 10^5$ J.

Propriété

Soit la forme différentielle ω : $\omega = g(x,y,z)\ dx + h(x,y,z)\ dy + l(x,y,z)\ dz$.

* Si : $\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x,z} = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{y,z}$ et $\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{x,y} = \left.\frac{\partial l}{\partial x}\right)_{y,z}$ et $\left.\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{x,y} = \left.\frac{\partial l}{\partial y}\right)_{x,z}$

Alors ω est exacte et peut se mettre sous la forme : $\omega = \mathrm{d}f = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y + f'_z\,\mathrm{d}z$,

avec $f_x' = g(x,y,z)$, $f_y' = h(x,y,z)$, $f_z' = l(x,y,z)$ pour tout (x, y, z).

* Sinon, ω est une quantité élémentaire et sera notée : $\omega = \delta W$. [15]

Ex. : $\omega = -x\ \mathrm{d}y$

$\left.\frac{\partial(0)}{\partial y}\right)_x = 0$ et $\left.\frac{\partial(-x)}{\partial x}\right)_y = -1$: ω n'est donc pas une différentielle, mais une quantité élémentaire δW.

On reconnaîtra en ω le travail élémentaire d'une force de pression ($-p\ \mathrm{d}V$).

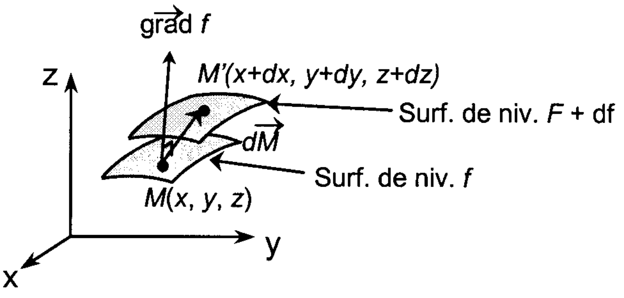
9.3. GRADIENT D'UNE FONCTION

Définition

A une dimension, on a besoin d'un scalaire (la pente de la courbe $y = f(x)$) pour définir la différentielle de f : $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$

A trois dimensions, il faudra un vecteur, le vecteur gradient, pour définir la différentielle de f :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}}$$



Interprétation géométrique

* $\mathrm{d}f > 0$ et maximum lorsque $\overrightarrow{grad f}$ et $\overrightarrow{dM}$ sont colinéaires

→ le gradient indique **la direction de plus grande variation (pente)**
(direction le long de laquelle f augmente le plus vite)

* $\mathrm{d}f = 0$ lorsqu'on se déplace sur la surface f = cste = surface de niveau f

c'est à dire lorsque $\overrightarrow{dM}$ tangent à la surface f = cste et alors $\overrightarrow{grad f} \perp \overrightarrow{dM}$

→ le gradient en M est orienté suivant **la normale à la surface f = cste** passant par M.

[15] Dans ce cas, la 1ère intégrale de ω sur un chemin dépend du chemin suivi, contrairement au cas des différentielles, dont la variation ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Cf. § « intégrales curvilignes » dans chapitre « fonctions vectorielles ».

Expressions du gradient dans les différents systèmes de coordonnées [16]

En cartésiennes : (base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \end{array} \right.$$

En cylindriques : (base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{c} \left.\dfrac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} \\ \left.\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi} \end{array} \right.$$

En sphériques : (base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{c} \left.\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)_{\varphi,\theta} \\ \left.\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \\ \left.\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \end{array} \right.$$

On peut les retrouver facilement à partir de la définition du gradient : $\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}$

Ex. : pour les coordonnées cylindriques, f (ρ, φ, z)

On a : $d\overrightarrow{M} = d\rho\ \vec{u}_\rho + \rho d\varphi\ \vec{u}_\varphi + dz\ \vec{u}_z$

On peut écrire le gradient sous la forme : $\overrightarrow{grad}f = a_\rho\ \vec{u}_\rho + a_\varphi\ \vec{u}_\varphi + a_z\ \vec{u}_z$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dM} &= (a_\rho\ \vec{u}_\rho + a_\varphi\ \vec{u}_\varphi + a_z\ \vec{u}_z)\cdot(\mathrm{d}\rho\ \vec{u}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\ \vec{u}_\varphi + \mathrm{d}z\ \vec{u}_z) \\ &= a_\rho\ \mathrm{d}\rho + \rho\ a_\varphi\ \mathrm{d}\varphi + a_z\ \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Or : $\mathrm{d}f = f'_\rho\ \mathrm{d}\rho + f'_\varphi\ \mathrm{d}\varphi + f'_{z\theta}\ \mathrm{d}z$

Les variables (ρ, φ, z) étant *indépendantes*, on peut choisir des chemins particuliers, comme par exemple celui où seule ρ varie de ρ à ρ + dρ, φ et z étant constantes.

On a alors sur ce chemin : $\mathrm{d}f = a_\rho\ \mathrm{d}\rho = f'_\rho\ \mathrm{d}\rho$ pour tout (ρ, φ, z).

D'où l'on tire : $a_\rho = f'_\rho,\ \forall\,(\rho, \varphi, z)$.

De la même façon, on montre : $a_\varphi = \dfrac{1}{\rho}f'_\varphi,\ \forall\,(\rho, \varphi, z)$ et $a_z = f'_z,\ \forall\,(\rho, \varphi, z)$.

Exemple : Expression d'une force conservatrice en fonction du gradient de E_p

Si $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p : $\vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M} = -\mathrm{d}E_p$

Or : $\vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M} = F_x\ \mathrm{d}x + F_y\ \mathrm{d}y + F_z\ \mathrm{d}z$

Et par définition : $\mathrm{d}E_p = \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z$.

Ceci est vrai quelques soient dx, dy et dz donc :

[16] Cf. chapitre « représentation dans l'espace » (chap. 11, page 39) pour la description des autres systèmes de coordonnées.

$F_x = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}$. On montre de la même façon : $F_y = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}$, $F_z = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}$.

Soit : $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$.

Autre exemple de relation de ce type : entre le potentiel V et le champ électrique $\vec{E}$: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

9.4. INTEGRALES MULTIPLES

a) Intégrales doubles

Si f est sommable sur la surface S , l'intégrale double de f sur S est : $\iint\limits_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Si la surface S est définie par : $a \le x \le b$
$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_1(x)$

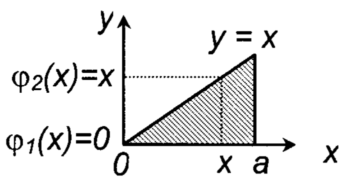
alors $$\boxed{\iint\limits_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y}.$$

Remarque
On peut intégrer dans n'importe quel ordre : d'abord sur x puis sur y ou l'inverse.

Cas particulier : calcul de l'aire $$\boxed{S = \iint\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

Ex. : calcul de l'aire du triangle rectangle de la figure

Aire = $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y = \int_0^a x\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a = \dfrac{a^2}{2}$



Propriétés
Comme pour les intégrales simples, propriété de linéarité.

Cas particulier $$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y\; f(x)\,g(y) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_c^d g(y)\mathrm{d}y$$

Changement de variables simple

Des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires[17] :

$$\boxed{\iint\limits_S f(p)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S f(r,\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$$ où P est un point de coordonnées (x,y) et (r,θ).

où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et $f(x, y) = f(r, \theta)$.

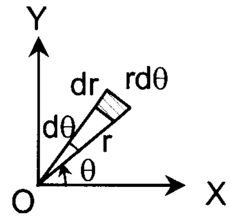
[17] Voir chapitre « représentations dans l'espace » pour plus de détails concernant les coordonnées polaires.

Exemple : Calcul de l'aire d'un disque

$$S(R) = \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On peut y arriver ainsi, mais cela nécessite un changement de variable ($x = R\cos\theta$). En fait, il est plus astucieux d'utiliser la symétrie circulaire en sommant directement les surfaces élémentaires obtenues en coordonnées polaires (on retrouve ainsi directement le changement de variable...) :

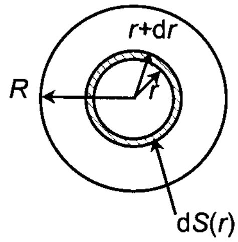
$$S(R) = \iint_S r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^R r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2}2\pi = \pi R^2.$$



On peut aussi raisonner avec une surface élémentaire qui a la <u>symétrie</u> du problème :

$S(R)$ = surface d'un disque de rayon R = $\int_{r=0}^{r=R} \mathrm{d}S(r)$

Donc la surface élémentaire $dS(r)$ qui a la symétrie du problème est la surface élémentaire hachurée sur la figure (couronne), c'est à dire la surface des points situés à $[r, r + dr]$ de 0.



Pour calculer $dS(r)$, passons par les accroissements[18] :
$\Delta S(r) = S(r+\Delta r) - S(r) = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\,\Delta r + \Delta r^2$
Donc : $\mathrm{d}S(r) = 2\pi r\,\mathrm{d}r$.

On peut aussi retrouver ce résultat directement avec les coordonnées polaires, en sommant tous les éléments de surface élémentaires situés à $[r, r+\mathrm{d}r]$:

$$\mathrm{d}S(r) = r\,dr\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi\,r\,\mathrm{d}r$$

Finalement : $S(R) = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$

Le résultat remarquable est :

$\mathrm{d}S(r) = 2\pi r\,\mathrm{d}r$ = **aire d'un rectangle** de longueur le périmètre du cercle de rayon r et de largeur $\mathrm{d}r$.

Autre exemple : volume élémentaire ayant la symétrie sphérique

$\mathrm{d}\tau(r)$ = volume élémentaire comprenant les points situés à $[r, r + \mathrm{d}r]$ de 0
= volume du cylindre de base la surface du disque et de côté $\mathrm{d}r$
= $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$

18 Cela suppose que l'on ait déjà calculé l'aire... C'est nécessaire pour justifier la méthode, mais on verra qu'on pourra l'utiliser par la suite sans refaire ce raisonnement.

b) Intégrales triples

Si f est sommable sur le volume V, l'intégrale triple de f sur V est : $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

Changements de variables simples

Des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques[19] :

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f(\rho,\phi,z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z}$$

Des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques :

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f(r,\phi,\theta)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta}$$

[19] Voir chapitre « représentations dans l'espace » pour plus de détails concernant les coordonnées cylindriques et sphériques.

10. FONCTIONS VECTORIELLES

10.1. FONCTION VECTORIELLE D'UNE VARIABLE REELLE (COURBE PARAMETREE)

a) Définition

Fonction qui à une variable τ associe un vecteur $\overrightarrow{OM}(\tau)$.
Définit ainsi une courbe par sa représentation paramétrique.

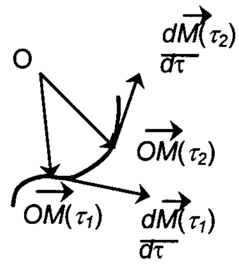
Par ex. en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM}(\tau)=x(\tau)\vec{u}_x+y(\tau)\vec{u}_y+z(\tau)\vec{u}_z$
courbe paramétrée : $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$

Si $t = \tau$ est le temps : les variables x, y, z indiquent la trajectoire et t indique comment cette trajectoire est parcourue.

b) Dérivée d'une fonction vectorielle

Définition

Le vecteur dérivée décrit les variations de $\overrightarrow{OM}(\tau)$ avec τ : cas $\tau_2 > \tau_1$



$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau}(\tau)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}(\tau+\Delta\tau)-\overrightarrow{OM}(\tau)}{\Delta\tau}=\frac{\overrightarrow{OM}(\tau+d\tau)-\overrightarrow{OM}(\tau)}{d\tau}$$

vecteur tangent à la courbe $\overrightarrow{OM}(\tau)$, orienté dans le sens τ croissant.

Remarque. : Le vecteur dérivée ne dépend pas de l'origine ! ($\overrightarrow{OM}(\tau+\Delta\tau)-\overrightarrow{OM}(\tau)=\overrightarrow{M(\tau)M(\tau+\Delta\tau)}$)

On le note donc : $\boxed{\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau}(\tau)=\frac{\overrightarrow{M(\tau)M(\tau+d\tau)}}{d\tau}=\frac{d\overrightarrow{M}}{d\tau}(\tau)}$

Propriétés

$$\frac{d}{d\tau}(\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2)=\frac{d\overrightarrow{OM}_1}{d\tau}+\frac{d\overrightarrow{OM}_2}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau}(f(\tau)\overrightarrow{ON})=\frac{df}{d\tau}\overrightarrow{ON}+f(\tau)\frac{d\overrightarrow{ON}}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau}(\overrightarrow{OM}_1\cdot\overrightarrow{OM}_2)=\frac{d\overrightarrow{OM}_1}{d\tau}\cdot\overrightarrow{OM}_2+\overrightarrow{OM}_1\cdot\frac{d\overrightarrow{OM}_2}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau}(\overrightarrow{OM}_1\wedge\overrightarrow{OM}_2)=\frac{d\overrightarrow{OM}_1}{d\tau}\wedge\overrightarrow{OM}_2+\overrightarrow{OM}_1\wedge\frac{d\overrightarrow{OM}_2}{d\tau}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\overrightarrow{OM}[\tau(x)]\right)=\frac{d\tau}{dx}\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau}$$

c) Différentielle d'une fonction vectorielle

Définition[20] $\boxed{d\overrightarrow{M}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau}(\tau)d\tau=\overrightarrow{M(\tau)M(\tau+d\tau)}}$

= vecteur tangent à la courbe $\overrightarrow{OM}(\tau)$, orienté dans le sens τ croissant.

Ex. : *Dérivée d'un vecteur unitaire* $\vec{u}$

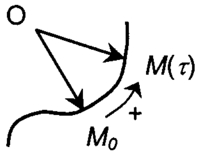
On a : $\dfrac{d\|\vec{u}\|^2}{d\tau}=0$, car $\|\vec{u}\|=1$. Or : $\dfrac{d\|\vec{u}\|^2}{d\tau}=\dfrac{d\vec{u}^2}{d\tau}=2\vec{u}\dfrac{d\vec{u}}{d\tau}$. Donc : $\vec{u}\cdot\dfrac{d\vec{u}}{d\tau}=0$.

Tout vecteur unitaire est perpendiculaire à son vecteur dérivé.

d) Abscisse curviligne

Définition

$s(\tau)$ = longueur de l'arc curviligne M_0M
mesurée à partir de M_0 choisi comme origine.
arc orienté suivant *convention* :
$s(\tau) > 0$ si l'objet ponctuel passe par M_0 avant M

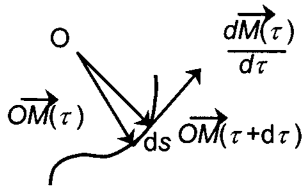


Rq. : si $\tau = t$, $s(t)$ est alors l'équation horaire.

Différentielle

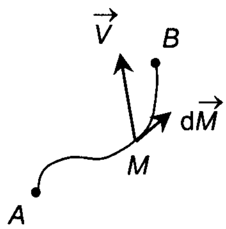
Si τ varie de dτ, s varie de ds = norme du vecteur élémentaire $d\overrightarrow{M}$: $ds=\|d\overrightarrow{M}\|$

Propriété importante $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}=\vec{t}$ = vecteur unitaire tangent à la courbe



10.2. Fonction vectorielle de plusieurs variables (champ de vecteurs)

a) Intégrale curviligne – Circulation



Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel (qui à tout point M(x, y, z) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Définition

La circulation de $\vec{V}$ sur le trajet AB est : $C=\int_A^B \vec{V}\cdot d\overrightarrow{M}$

Propriété

La circulation sur tout contour fermé d'un gradient est nulle. Formulé autrement : sa circulation ne dépend pas du chemin suivi, elle ne dépend que des points de départ et d'arrivée du contour.

$\overrightarrow{grad}f\cdot d\overrightarrow{M}=df$ (par définition du gradient)

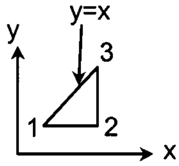
Le long d'un contour fermé : $\boxed{\oint \overrightarrow{grad}f\cdot d\overrightarrow{M}=\oint df=0}$.

Le long d'un contour ouvert AB : $\boxed{\int_A^B \overrightarrow{grad}f\cdot d\overrightarrow{M}=f(B)-f(A)}$

[20] De la même façon que pour le vecteur dérivée, le vecteur différentiel ne dépend pas de l'origine.

Par contre, si $\vec{V}$ n'est pas un gradient, la circulation sur un contour fermé peut être non nulle. Formulé autrement : sa circulation dépend du chemin suivi.

Exemple :



$\vec{V} = -x\,\vec{u}_y$ *sur le contour C fermé 1-2-3-1 de la figure*

$$\vec{V}\cdot d\vec{M} = -x\,dy$$

$$\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{M} = \int_1^2 -x\,dy + \int_2^3 -x\,dy + \int_3^1 -x\,dy = 0 - x_2(y_3 - y_1) - \frac{(y_1^2 - y_3^2)}{2}$$

qui est différent de *0* a priori. Si par ex. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_3 = 2$: $\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{M} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$

On reconnaîtra le travail d'une force de pression ($\int -\,pdV$) en thermodynamique.

b) Divergence (forme locale du flux)

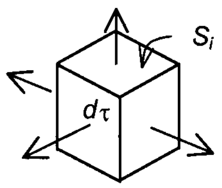
Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur (qui à tout point M(*x*, *y*, *z*) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Flux

Le **flux** de $\vec{V}$ à travers une surface *S* orientée est le scalaire : $F_{\vec{V}}(S) = \iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S}$

Si *S* est une surface fermée entourant un volume τ, on oriente toujours $d\vec{S}$ vers l'extérieur.

Forme locale (définition)



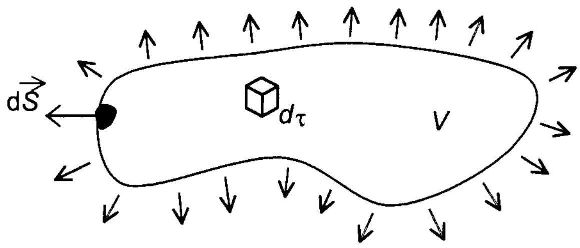
Le flux élémentaire $dF_{\vec{V}} = F_{\vec{V}}\big(S(d\tau)\big)$ de $\vec{V}$ sortant à travers la surface *S* entourant le volume élémentaire $d\tau$ est proportionnel à ce volume.
On appelle **divergence** de $\vec{V}$ (notée div $\vec{V}$) le coefficient de proportionnalité.

$$dF_{\vec{V}} = F_{\vec{V}}\big(S(d\tau)\big) = \sum_{i=1}^{6} \vec{V}\cdot\vec{S}_i = div\,\vec{V}\,d\tau\,,$$

où S_i désigne les surfaces des 6 faces du cube $d\tau$.

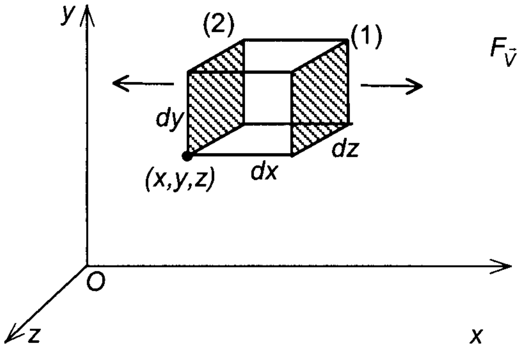
Forme globale (formule d'Ostrogradski)

Le flux de $\vec{V}$ sortant à travers une surface fermée *S(V)* entourant le volume *V* est égal à la somme de div $\vec{V}$ sur tout le volume :



$$F_{\vec{V}}\big(S(V)\big) = \iint_{S(V)} \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\,\vec{V}\,d\tau$$

Calcul de la divergence en coordonnées cartésiennes [21]

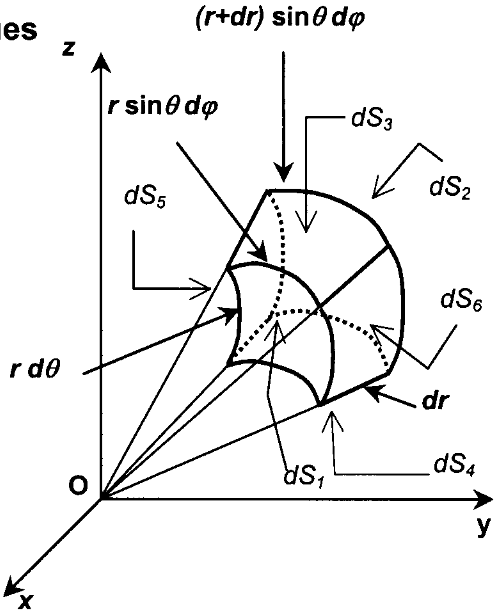


$$F_{\vec V}(S_1 \cup S_2) = \underbrace{V_{x+dx}}_{\to\, x+dx}\, dy\,dz - \underbrace{V_x}_{\to\, x}\, dy\,dz$$
$$= \left[V_x(x+dx,y,z) - V_x(x,y,z)\right] dy\,dz$$
$$= \left[\frac{\partial V_x}{\partial x}(x,y,z)dx\right] dy\,dz$$
$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} d\tau$$

En sommant sur les deux autres couples de forces :

$$F_{\vec V}(S(d\tau)) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) d\tau \quad \text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{div}\vec V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \cdot \vec V}$$

Calcul de la divergence en coordonnées sphériques



Soit le champ de vecteurs :
$\vec E(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec u_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec u_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec u_\varphi$

Le volume élémentaire en coordonnées sphériques est :
$d\tau = dr\ \ r d\theta\ \ r\sin\phi d\varphi$.

La surface dS, entourant ce volume, est composées de 6 facettes : $dS = dS_1 \cup dS_2 \cup dS_3 \cup dS_4 \cup dS_5 \cup dS_6$.

Par définition de la divergence le flux de $\vec E$ à travers la surface fermée dS est :

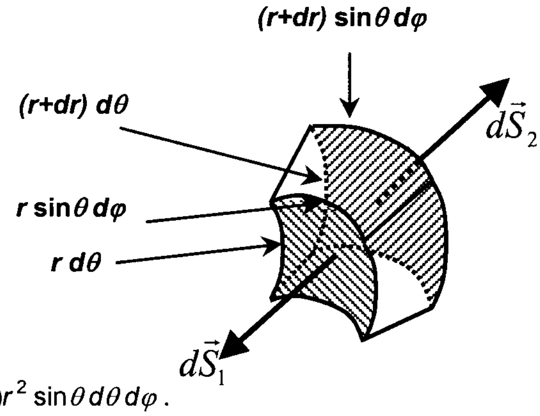
$$F_{\vec E}(dS) = \operatorname{div}\vec E\ d\tau \qquad (1)$$

Pour calculer la divergence il faut donc calculer le flux de $\vec E$ sortant de $d\tau$, qui s'écrit : $F_{\vec E}(dS) = \sum_{i=1}^{6} \vec E \cdot d\vec S_i$.

<u>Flux de $\vec E$ à travers les facettes dS_1 et dS_2 perpendiculaire à $\vec u_r$:</u> $d\vec S_1 = -dS_1\vec u_r$ et $d\vec S_2 = dS_2\vec u_r$

$$F_{\vec E}(dS_1 \cup dS_2) = \vec E(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec S_1 + \vec E(r+dr,\theta,\varphi)\cdot d\vec S_2 = -dS_1 E_r(r,\theta,\varphi) + dS_2 E_r(r+dr,\theta,\varphi).$$

Les surfaces dS_1 et dS_2 ne sont pas égales :
$dS_1 = r\,d\theta\ r\sin\theta\, d\varphi$ et
$dS_2 = (r+dr)d\theta(r+dr)\sin\theta\, d\varphi$
$= (r^2 + 2rdr + dr^2)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
$\approx (r^2 + 2rdr)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
car, dr étant très petit, on ne garde pas le terme d'ordres 2 en dr.



On obtient donc
$F_{\vec E}(S_1 \cup S_2) = E_r(r+dr,\theta,\varphi)(r^2 + 2rdr)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi - E_r(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

[21] Cf. chapitre « représentation dans l'espace » (chap. 11, page 39) pour la description des autres systèmes de coordonnées.

Par ailleurs : $E_r(r+dr,\theta,\varphi)-E_r(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\partial E_r}{\partial r}dr$, donc :

$$F_{\vec{E}}(dS_1 \cup dS_2)=\left(E_r(r,\theta,\varphi)+\frac{\partial E_r}{\partial r}dr\right)\left(r^2+2rdr\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi - E_r(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\left(r^2\frac{\partial E_r}{\partial r}dr+2rdr\,E_r(r,\theta,\varphi)+2r\frac{\partial E_r}{\partial r}(dr)^2\right)\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

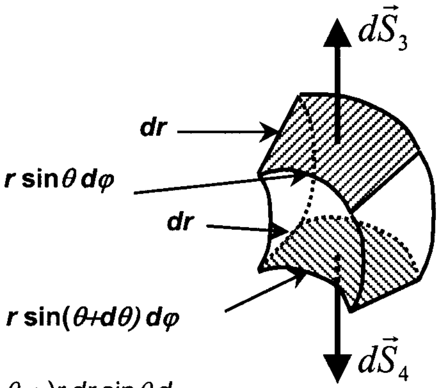
en négligeant le terme en $(dr)^2$ il vient :

$$F_{\vec{E}}(dS_1 \cup dS_2)=\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}\,d\tau\ . \qquad (2)$$

Flux de $\vec{E}$ à travers les facettes dS_3 et dS_4 perpendiculaire à $\vec{u}_\theta$: $d\vec{S}_3=-dS_3\vec{u}_\theta$ et $d\vec{S}_4=dS_4\vec{u}_\theta$

$$F_{\vec{E}}(dS_3 \cup dS_4)=\vec{E}(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_3+\vec{E}(r,\theta+d\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_4=-dS_3E_\theta(r,\theta,\varphi)+dS_4E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)\ .$$

Les surfaces dS_3 et dS_4 ne sont pas égales :
$dS_3=dr\ r\sin\theta\, d\varphi$ et
$dS_4=dr\ r\sin(\theta+d\theta)d\varphi$.
Le développement limité de $\sin(\theta+d\theta)$ au voisinage de θ donne (premier ordre en $d\theta$) :
$\sin(\theta+d\theta)\approx\sin\theta+\dfrac{d\sin\theta}{d\theta}d\theta=\sin\theta+\cos\theta\ d\theta$ donc
$dS_4\approx dr\ r(\sin\theta+\cos\theta\ d\theta)d\varphi$.



On obtient donc :
$F_{\vec{E}}(S_3 \cup S_4)=E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)r\,dr\left(\sin\theta+\cos\theta\, d\theta\right)d\varphi-E_\theta(r,\theta,\varphi)r\,dr\sin\theta\, d\varphi$.

Or : $E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)=E_\theta(r,\theta,\varphi)+\dfrac{\partial E_\theta}{\partial\theta}d\theta$, donc :

$$F_{\vec{E}}(S_3 \cup S_4)=E_\theta(r,\theta,\varphi)r\,dr\cos\theta\, d\theta\, d\varphi+\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}r\,dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi+\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}r\,dr\cos\theta(d\theta)^2\,d\varphi$$

en négligeant le terme en $(d\theta)^2$ il vient :

$$F_{\vec{E}}(S_3 \cup S_4)=\frac{1}{r\sin\theta}\left(E_\theta(r,\theta,\varphi)\cos\theta+\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}\sin\theta\right)r^2\,dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, E_\theta\right)d\tau\ . \quad (3)$$

Flux de $\vec{E}$ à travers les facettes dS_5 et dS_6 perpendiculaire à $\vec{u}_\varphi$: $d\vec{S}_5=-dS_5\vec{u}_\varphi$ et $d\vec{S}_6=dS_6\vec{u}_\varphi$

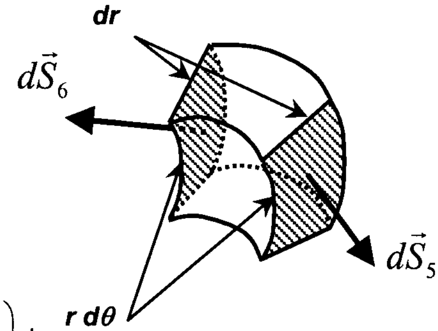
$$F_{\vec{E}}(dS_5 \cup dS_6)=\vec{E}(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_5+\vec{E}(r,\theta,\varphi+d\varphi)\cdot d\vec{S}_6=-dS_5E_\varphi(r,\theta,\varphi)+dS_6E_\varphi(r,\theta,\varphi+d\varphi)\ .$$

Les surfaces dS_5 et dS_6 sont égales : $dS_5=dS_6=dr\,r\,d\theta$.

Sachant que $E_\varphi(r,\theta,\varphi+d\varphi)=E_\varphi(r,\theta,\varphi)+\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi$,

on a immédiatement :

$$F_{\vec{E}}(dS_5 \cup dS_6)=dr\,r\,d\theta\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}dV\ . \qquad (4)$$



D'après les équations (2), (3) et (4) :

$$F_{\vec{E}}(S)=\sum_{i=1}^{6}\vec{E}\cdot d\vec{S}_i=\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, E_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)d\tau$$

donc par définition de $\operatorname{div}\vec{E}$ (1) : $\boxed{\operatorname{div}\vec{E}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\left(r^2E_r\right)}{\partial r}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, E_\theta\right)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}}$

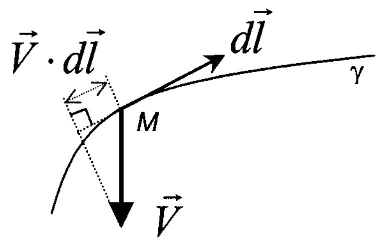
Exemple : théorème de Gauss (en électrostatique)

Soit $\vec{E}$ le champ électrique, Q les charges électriques et ρ la densité volumique de charge.
Soient *S* et *V* tels que : *S* est une surface entourant un volume *V* qui contient les charges Q.

Forme globale : Flux de $\vec{E}$ à travers *S* : $F_{\vec{E}}(S) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \displaystyle\iiint_{V(S)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = \iiint_{V(S)} \text{div } \vec{E}\, d\tau$

Forme locale : $\boxed{\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

c) Rotationnel (forme locale de la circulation)

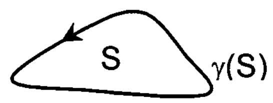


Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur (qui à tout point M(*x*, *y*, *z*) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Définition

On appelle **circulation** de $\vec{V}$ le long de la courbe orientée γ le scalaire : $C_{\vec{V}}(\gamma) = \displaystyle\int_{\gamma} \vec{V}\cdot\vec{dl}$

Lorsque γ est fermée : $C_{\vec{V}}(\gamma) = \displaystyle\oint_{\gamma} \vec{V}\cdot\vec{dl}$



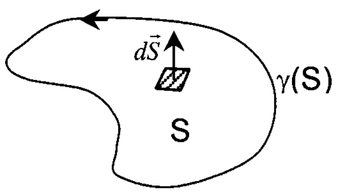
Propriété-définition (forme locale)

La circulation sur un contour élémentaire fermé $d\gamma$ entourant une surface élémentaire $d\vec{S}(d\gamma) = dS\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ vecteur unitaire) est "proportionnelle" à cette surface. On appelle **rotationnel** de $\vec{V}$ le vecteur, noté $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$, vérifiant :

$C_{\vec{V}}(d\gamma) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\cdot d\vec{S}$

Remarque : le choix de $\vec{n}$ oriente la surface $d\vec{S}(d\gamma)$ et son contour $d\gamma$ (règle de la "main droite" ou du "tire bouchon" voir paragraphe 7.3. (page 16))

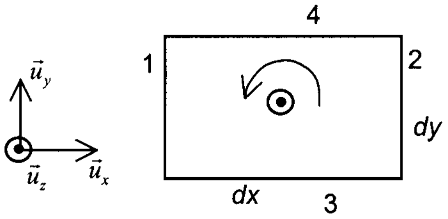
Forme globale (Théorème de Stokes-Ampère)



$C_{\vec{V}}(\gamma(S)) = \displaystyle\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\cdot d\vec{S}$

Calcul du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Soit le contour élémentaire $d\gamma$ fermé : $d\gamma = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4$



$$
\begin{aligned}
C_{\vec V}(1 \cup 2) &= C_{\vec V}(1) + C_{\vec V}(2) \\
&= \vec V(x,y)\cdot d\vec l_1 + \vec V(x+dx,y)\cdot d\vec l_2 \\
&= \vec V(x,y)\cdot(-dy\,\vec u_y) + \vec V(x+dx,y)\cdot(-dy\,\vec u_y) \\
&= \left[V(x+dx,y) - V(x,y)\right]dy \\
&= \frac{\partial V_y}{\partial x}dxdy
\end{aligned}
$$

De même $C_{\vec V}(3 \cup 4) = -\dfrac{\partial V_x}{\partial y}dxdy$.

donc $C_{\vec V}(d\gamma) = C_{\vec V}(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4) = \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)dxdy = \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)dS$ avec $d\vec S(d\gamma) = dS\,\vec u_z$.

Par identification avec la définition du rotationnel on obtient la composante suivant z de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec V$:

$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec V\right)_z = \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)$.

Les autres composantes s'obtiennent de la même matière : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec V = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{matrix}\right. = \overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec V$

Exemple : Théorème d'Ampère (magnétostatique)

$\vec B$ est le champ magnétique, I le courant et $\vec j$ la densité de courant.

Forme globale : $C_{\vec B}(\gamma) \;=\; \mu_0 I_{\text{int}} \;=\; \mu_0 \displaystyle\iint_{S(\gamma)} \vec j\cdot d\vec S \;=\; \iint_{S(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec B\cdot d\vec S$

Forme locale : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec B = \mu_0 \vec j}$

10.3. COMPLEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

Laplacien scalaire et Laplacien vectoriel

Définition : on appelle *laplacien scalaire* d'une fonction scalaire *f(M)* le scalaire définit par :

$$\Delta = \mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}$$

En coordonnées cartésiennes *f(M) = f(x,y,z)* et :

$$\Delta f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)_{x,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)_{x,y}$$

On appelle *laplacien vectoriel* d'un champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z)$ le vecteur définit en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\Delta}\vec{V} = (\Delta V_x)\vec{u}_x + (\Delta V_y)\vec{u}_y + (\Delta V_z)\vec{u}_z$$

Identité entre opérateurs

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \vec{0}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} - \vec{\Delta}$ $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = 0$

Quelques formules utiles

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, nm = n\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, m + m\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$$
$$\mathrm{div}(m\vec{A}) = m\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, m)\cdot\vec{A}$$
$$\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(m\vec{A}) = m\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}} m)\wedge\vec{A}$$

moins fréquente : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \vec{B}(\mathrm{div}\,\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$

Notation « nabla » : $\vec{\nabla}$

Certain ouvrage introduisent le vecteur[22] symbolique « nabla » , noté $\vec{\nabla}$, de coordonnées cartésiennes : $\left|\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{array}\right.$

Cela permet d'écrire :

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f = \vec{\nabla} f$ $\mathrm{div}\ \vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V}$ $\Delta\ f = \nabla^2 f$

Remarque : L'utilisation du vecteur nabla est hasardeuse pour établir les formules entre opérateurs ; en particulier, elle peut conduire à un résultat faux dans le cas de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B})$.

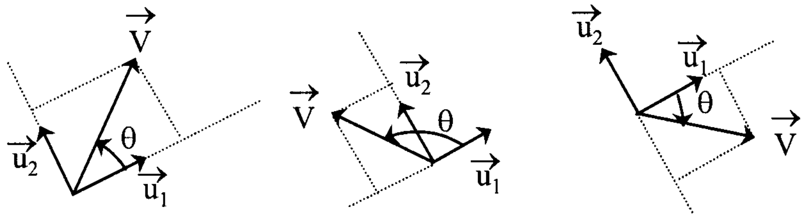
Remarque : L'utilisation du vecteur nabla n'est possible qu'en coordonnées cartésiennes !

[22] En fait c'est un opérateur.

11. REPRESENTATION DANS L'ESPACE

Idée : représenter l'espace de la façon la plus commode possible.

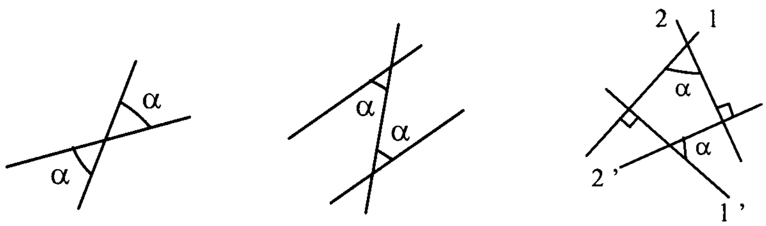
11.1. PROJECTION



La projection de $\vec{V}$ sur la base orthogonale ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$) pour les trois valeurs de l'angle θ qu'il fait avec $\vec{u}_1$ vaut :

- sur $\vec{u}_1$: $\|\vec{V}\|\cos\theta$
- sur $\vec{u}_2$: $\|\vec{V}\|\sin\theta$

C'est l'occasion de rappeler les propriétés sur les angles : notamment si 1⊥1' et 2⊥2', (1,2)=(1',2').



11.2. BASES

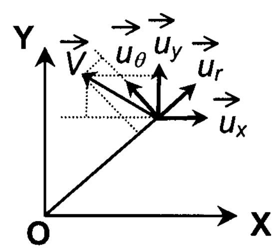
A 3 dimensions une base est définie par trois vecteurs $(\vec{u}_1 ,\vec{u}_2 ,\vec{u}_3)$.
Les bases généralement utilisées en physique sont *orthonormées* et *directes* :

normée : les vecteurs de la base sont unitaires : $\|\vec{u}_1\|=1, \|\vec{u}_2\|=1, \|\vec{u}_3\|=1$

orthogonale : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$

directe : $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3$, $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1$, $\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2$
ou encore *règle de la main droite* :
main droite dans sens de $\vec{u}_1$, fermer la main dans sens de $\vec{u}_2$, le pouce indique $\vec{u}_3$.

Une base peut être *locale* : $(\vec{u}_1 ,\vec{u}_2 ,\vec{u}_3)$ sont alors fonctions du point *M*.
→ leur direction, sens et norme dépendent de *M*.



Le choix de la base ne modifie pas le vecteur ;
ce n'est qu'une façon de décomposer le *même* vecteur.