Contrôle de mécanique du solide

Une voiture se déplace rectilignement dans la direction (Ox) avec une accélération $\gamma = \alpha t$. α est une constante positive, t est le temps. A $t = 0$, un point B fixe dans la voiture est en $(0,b,0)$ dans le référentiel (R(O,x,y,z)) lié au sol.

Une tige CD, de longueur $2l$ et de masse négligeable, est fixée en B, milieu de CD, sur un axe fixe de la voiture. La tige CD tourne dans le plan (O,x,y) autour du son centre B à la vitesse angulaire ω_0 constante positive. Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 ($m_1 = m_2 = m$) sont fixées à la tige CD en C et D, respectivement.

1) Déterminer, dans le référentiel du sol (R(O,x,y,z)) et dans le référentiel barycentrique des deux masses, les quantités suivantes :

   a) Vitesse et accélération du point C

   b) Moment cinétique au point B et au point O du solide composé de la tige CD et des deux masses.

2) Le système {m_1, m_2, tige CD} est remplacé par une barre de masse $M = 2m$ homogène de même longueur. Déterminer le moment cinétique de la barre par rapport à O dans le référentiel (R (O,x,y,z)).

<u>Donnée</u> : Le moment d'inertie d'une barre homogène, de masse m, de longueur L, par rapport à un axe perpendiculaire à la barre passant par une des ces extrémités est $J = \frac{1}{3} m L^2$.

$(R(O,x,y,z))$: Réf. du laboratoire

Dans (R) le mouvement de B est rectiligne

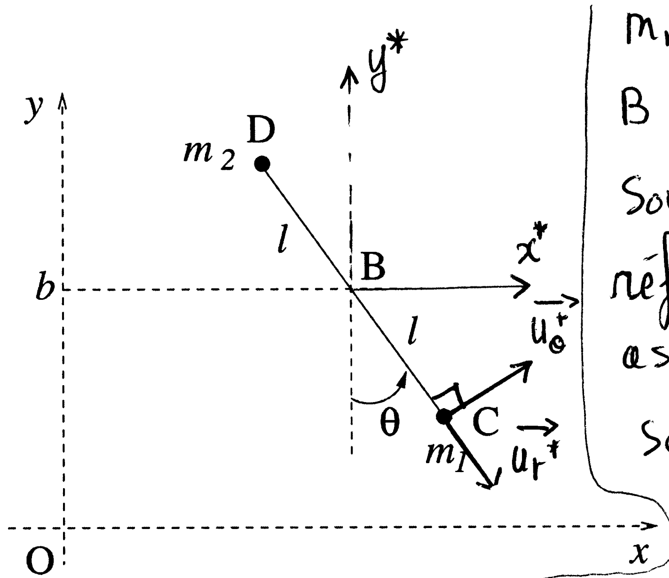
$\begin{cases} y_B = b = c^{te} \\ x_B(t) \end{cases}$

$\vec{v}_{B/(R)} = \dot{x}_B \vec{u}_x$

$\Rightarrow \vec{a}_{B/(R)} = \ddot{x}_B \vec{u}_x = \alpha t \vec{u}_x$

donc $\dot{x}_B = \left(\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0\right)\vec{u}_x$ ← vitesse initiale

et $x_B = \left(\frac{1}{6}\alpha t^3 + v_0 t\right)\vec{u}_x$ car à $t=0, x_B=0$



$m_1 = m_2 = m$ donc B barycentre de $\{m_1, m_2\}$

Soit $(R^*(B, x^*, y^*, z))$ le référentiel barycentrique associé à (R).

Soit $\{\vec{u}_r^*, \vec{u}_\theta^*\}$ une base polaire dans (B, x^*, y^*)

dans (R^*) : $\left(\dot{\vec{u}}_r^*\right)_{/R^*} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta^* = \omega_0 \vec{u}_\theta^*$

$\left(\dot{\vec{u}}_\theta^*\right)_{/R^*} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r^* = -\omega_0 \vec{u}_r^*$

1) Dans (R^*) la tige (CD) tourne à la vitesse angulaire ω_0

donc $\left(\overrightarrow{\Omega}_{\text{tige CD}}\right)_{R^*} = \omega_0 \overrightarrow{u_z} = \left(\overrightarrow{\Omega}_{\text{tige CD}}\right)_{(R)}$

car $\overrightarrow{\Omega}(R^*/(R)) = \overrightarrow{0}$ Réf. barycentrique en translation /(R)

a) Dans (R^*) : $\overrightarrow{v^*}(B) = \overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{v}(C)^* = \overrightarrow{\Omega}_{\text{tige CD}} \wedge \overrightarrow{BC} = \dot{\theta}\, l\, \overrightarrow{u_\theta}^* = \underline{\underline{\omega_0 l \overrightarrow{u_\theta}^*}}$

on retrouve aussi ce résultat en polaire dans (R^*) : $\overrightarrow{v}^*(C) = \frac{d}{dt}\left(l\,\overrightarrow{u_r}^*\right) = \uparrow$ dans (R^*)

$\left(\overrightarrow{a^*}(C)\right)_{R^*} = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{v^*}(C)\right)_{(R^*)} = \underline{\underline{-\omega_0^2\, l\, \overrightarrow{u_r}^*}}$

Dans (R) : $\begin{cases} \overrightarrow{v}(C)_{/(R)} = \overrightarrow{v}(B)_{/(R)} + \overrightarrow{v^*}(C)_{/(R^*)} \\ \text{Changement de référentiel} \end{cases}$ car $\overrightarrow{\Omega}(R^*/(R)) = \overrightarrow{0}$

donc $\overrightarrow{v}(C) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0\right)\overrightarrow{u_x} + \omega_0 l \overrightarrow{u_\theta}^*}}$

de même $\overrightarrow{a}(C)_{/R} = \overrightarrow{a}(B)_{/(R)} + \overrightarrow{a^*}(C)_{/(R^*)} = \underline{\underline{\alpha t \overrightarrow{u_x} - \omega_0^2 l \overrightarrow{u_r}^*}}$

b) Moment cinétique

dans (R^*) $\underline{\underline{\overrightarrow{L_B^*} = \overrightarrow{L_O^*}}} = \overrightarrow{L^*}$ cf. cours

$\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{BC} \wedge m_1 \overrightarrow{v}(C)^* + \overrightarrow{BD} \wedge m_2 \overrightarrow{v^*}(D)$

or $\begin{cases} \overrightarrow{v^*}(D) = -\overrightarrow{v^*}(C) & \text{et } \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DC} \\ \text{et } m_1 = m_2 = m \end{cases}$ donc $\underline{\underline{\overrightarrow{L^*} = 2m\, l^2 \omega_0 \overrightarrow{u_z}}}$

car $\overrightarrow{u_z}^* = \overrightarrow{u_r}$

dans (R) : on sait que $\underline{\underline{\overrightarrow{L_B} = \overrightarrow{L^*}}}$ car B barycentre de $\{m_1, m_2\}$

$\uparrow$ dans (R)

on peut aussi le retrouver avec $\overrightarrow{L_B} = m_1 \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{v}(C) + m_2 \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{v}(D)$

avec $\overrightarrow{v}(C) = \left(\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0\right)\overrightarrow{u_x} + \omega_0 l \overrightarrow{u_\theta}^*$ et $\overrightarrow{v}(D) = \left(\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0\right)\overrightarrow{u_x} - \omega_0 l \overrightarrow{u_\theta}^*$

$$\begin{cases}\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} \\ \vec{OD} = \vec{OD} + \vec{BC}\end{cases}$$

permettent de retrouver facilement que (cf cours)

$$\vec{L}_{O/(R)} = \vec{L}_{B/(R)} + 2m\,\vec{OB} \wedge \vec{v}(B)_{/R} \qquad (*)$$

$$= \vec{L}^* + 2m \begin{vmatrix} x_B \\ y_B = b \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x}_B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

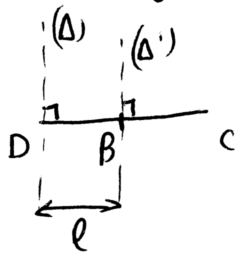
$$= 2ml^2\omega_0 \vec{u_z} - 2mb\dot{x}_B \vec{u_z}$$

donc $$\vec{L}_{O/(R)} = \left[2ml^2\omega_0 - 2mb\left(\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0\right)\right]\vec{u_z}$$

2) On peut toujours utiliser (*)

mais il faut calculer $\vec{L}^*$ (tige CD)

on connait le moment d'inertie de la tige par rapport à (Δ)



$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{3}M(2l)^2 = \frac{4}{3}Ml^2 \quad \text{cf. donnée}$$

or d'après th. de Huygens $J_{(\Delta)} = J_{(\Delta')} + Ml^2$ car B : barycentre de la tige $\in (\Delta')$, $(\Delta') = (Bz)$

$$\Rightarrow J(\Delta') = \left(\frac{4}{3} - 1\right)Ml^2$$

$$J(\Delta') = \frac{1}{3}Ml^2 = \frac{2}{3}ml^2$$

et $\vec{L}^* = J_{(\Delta')}\dot{\theta}\,\vec{u_z}$ car dans (R') la tige tourne autour de (Bz)

donc $$\vec{L}_{O/R} = \left[\frac{2}{3}ml^2\omega_0 - 2mb\left(\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0\right)\right]\vec{u_z}$$