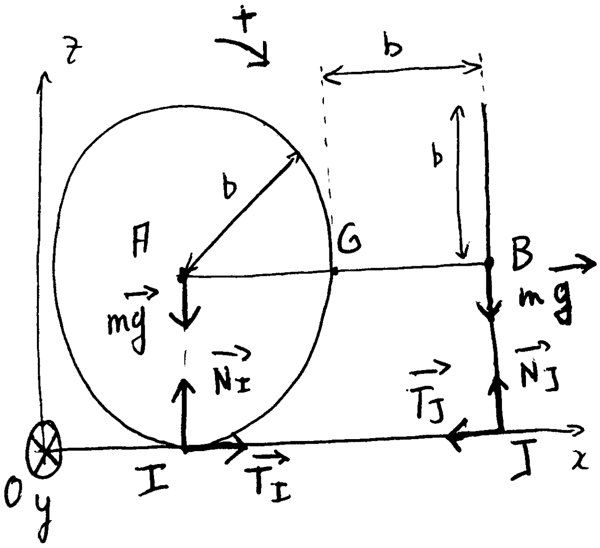
a) A centre de masse de (S_1) de masse m
B " (S_3) " m
(S_2) de masse nulle

} G, centre de masse de (S), est au milieu de $[A,B]$.

b) Sys. $= \{(S_1)\}$ th. du moment cinétique dans (R) : $\dfrac{d\vec{L}_A(S_1)}{dt} = \sum \vec{M}(\text{force ext})$ (1)

Dans (R^*) $L^*_{(Az)} = J\omega$ avec $\underline{J = mb^2}$

(A_y) axe de symétrie et $\vec{\Omega} = \omega \vec{u_y}$ donc $\vec{L^*} = \vec{L^*_A} = J\omega\vec{u_y}$



forces ext sur (S_1) :

- $m\vec{g}$ en A
- $\vec{N_I} = N_I\vec{u_z}$ et $\vec{T_I} = T_I\,\vec{u_x}$ en I
- $\vec{F}_{(S_2)\text{ sur }(S_1)}$ en A
- <u>Couple moteur</u> $\underline{\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u_y}}$

Donc (1) s'écrit : $\vec{u_y} J\dot{\omega} = \vec{AI}\wedge\vec{T_I} + \vec{\Gamma} = (\Gamma - bT_I)\vec{u_y}$ (2)

c) Koenig $\quad L_G(S_1) = \vec{L^*}(S_1) + \underbrace{\vec{GA}\wedge m\vec{v}(A)}_{=\vec{0}}$ car A centre de masse de (S_1)

$\hookrightarrow$ car $\vec{v}(A) \,//\, \vec{u_x}$

$= J\omega\vec{u_y}$

$$\vec{L}_G(S_3) = \int_{P\in(S_3)} \vec{GP}\wedge dm\,\vec{v}(P) = \left(\int_{P\in(S_3)} \vec{GP}\,dm\right)\wedge\vec{v}(G)$$ car $\vec{v}(P) = \vec{v}(G)$ $\forall P\in(S_3)$

car B centre de masse de (S_3)

$= m\vec{GB}\wedge\vec{v}(G) = \vec{0}$ car $\vec{GB} \,//\, \vec{v}(G)$

donc $\vec{L}_G(S) = \vec{L}_G(S_1) + \underbrace{\vec{L}_G(S_2)}_{=\vec{0}} + \vec{L}_G(S_3) = \underline{J\omega\vec{u_y}}$

car masse $= 0$

forces extérieures sur (S) :

(Il n'y a pas le couple $\vec{\Gamma}$ car c'est une force interne → force de (S_2) sur (S_1))

- $m\vec{g}$ en A ; $m\vec{g}$ en B
- $\vec{N_I}$ et $\vec{T_I}$ en I
- $\vec{N_J}$ et $\vec{T_J}$ en J avec $\begin{cases} \vec{N_J} = N_J \vec{u_z} \\ \vec{T_J} = T_J \vec{u_x} \end{cases}$

Th du moment cinétique en G (centre de masse de (S)) par (S) dans (R) :

$$\frac{d\vec{L_G}(S)}{dt} = \Sigma \vec{M}(\overrightarrow{\text{forces ext}})$$

$$J\dot{\omega}\vec{u_y} = \underbrace{\vec{GA}\wedge m\vec{g} + \vec{GB}\wedge m\vec{g}}_{(\underbrace{\vec{GA}+\vec{GB}}_{=\vec{0}})\wedge m\vec{g}} + \vec{GI}\wedge\vec{N_I} + \vec{GJ}\wedge\vec{N_J} + \vec{GI}\wedge\vec{T_I} + \vec{GJ}\wedge\vec{T_J}$$

avec $\vec{T_I} = T_I\vec{u_x}$ et $\vec{T_J} = T_J\vec{u_x}$

donc $J\dot{\omega}\vec{u_y} = (N_I b - N_J b - T_I b - T_J b)\vec{u_y}$ (3)

d) • pas de glissement en I donc $\vec{v_g}(I) = \vec{0}$ or $\frac{d\vec{AI}}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{AI}$

donc et $\vec{v}(A) = v_G\vec{u_x} = \vec{v}(G)$ → donc $\underline{\underline{v_G = b\omega}}$ (4)

• glissement en J : donc <u>frottement dynamique</u> $\|\vec{T_J}\| = f\,\|\vec{N_J}\|$

et $\vec{T_J}$ s'oppose à $\vec{v_g}(J) = \vec{v}(G)$ donc $\vec{T_J} = -f N_J \vec{u_x}$ soit $\underline{\underline{T_J = -f N_J}}$ (5)

$\Sigma \overrightarrow{\text{forces ext sur }(S)} = 2m\,\vec{a}(G)$ dans (R) Galiléen

donc $2m\dot{\vec{v_G}} = 2m\vec{g} + \vec{N_I} + \vec{N_J} + \vec{T_1} + \vec{T_2}$

en projetant $\begin{cases} 2mg = N_I + N_J & (6) \\ 2m\dot{v_g} = T_I + T_J & (7) \end{cases}$

On cherche $\dot{\omega}$ en fonction des données du problème ; il suffit de manipuler les équations que l'on a trouvées pour éliminer les inconnues : T_I, T_J, N_I et N_J.

③ $\Rightarrow m b^2 \dot\omega = \left(N_I - N_J + (T_I + T_J)\right) b$ avec $\underline{\underline{J = mb^2}}$

$m b \dot\omega = N_I - N_J - 2 m b \dot\omega$, d'après ⑦

$= 2mg - 2N_J - 2m\dot\omega b$, d'après ⑥

$= 2mg + \frac{2}{f} T_J - 2mb\dot\omega$, d'après ⑤

$= 2mg + \frac{2}{fb}(\Gamma - J\dot\omega) - 2mb\dot\omega$ d'après ②

donc $\dot\omega b \overset{④}{=} v_G = \frac{2}{3} \frac{\Gamma/_{bm} - gf}{2 - f} > 0$ ⑧

$v_G > 0$, le chasse-neige avance donc,

Il faut donc que $\underline{\underline{\Gamma \geq g f b m}}$ (car $f < 1$)

Pour qu'il n'y ait pas de glissement en I, il faut $\|\vec{T_I}\| \leq f \|\vec{N_I}\|$

frottement statique en I

d'après ② et ⑧ : $T_I = \left(\frac{4}{3} - f\right) \frac{\Gamma/b - fmg}{2 - f} + fmg$

donc $N_J \overset{⑧}{=} \cdots$ or d'après ⑥ $N_I = 2mg - N_J$

donc en manipulant un peu $N_I = \frac{\Gamma/b + 2(1-f)mg}{2 - f}$

la condition $\|\vec{T_I}\| \leq f \|\vec{N_I}\|$ s'écrit donc $\underline{\Gamma \leq 2mgb}$

Il faut donc pour le bon fonctionnement du chasse-neige que : $\underline{\underline{gfbm \leq \Gamma \leq 2gmb}}$