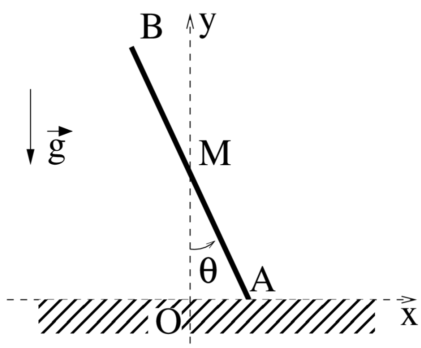
Serie IV : Exercice 1 : chute d'une barre sur une patinoire

Une barre rigide AB, homogène de masse *m,* de longueur 2*l* et de section négligeable, est posée verticalement sur une patinoire horizontale. Le contact entre la barre et la patinoire en A est supposé sans frottement (glissement parfait). Soit θ l'angle que fait la barre par rapport à la verticale (voir figure).



A l'instant initial, la barre est très légèrement déplacée (sans vitesse initiale) de son équilibre instable et tombe.

a) En utilisant le théorème de la résultante dynamique (lois de Newton) et le théorème du moment cinétique :

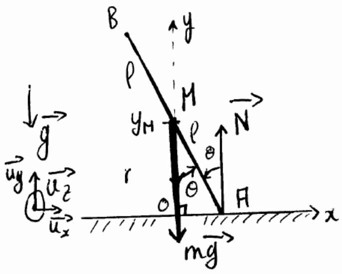
(i) Montrer que le mouvement du milieu M de AB est vertical.

(ii) Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

b) En utilisant l'énergie, retrouver l'équation différentielle précédente.

c) Déterminer la vitesse de M lorsque M touche le sol.

Donnée : Le moment d'inertie d'une barre de longueur L, homogène de masse m, par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de gravité est $mL^2/12$.



a) M est le milieu de AB
la barre est homogène donc M est
le centre de gravité de la barre (G)

forces sur la barre dans (R) lié au sol :
- poids $m\vec{g}$ point d'application $M \equiv G$
- force du sol sur la barre $\vec{N}$ ⊥ au sol
car il n'y a pas de frottement
le point d'application de $\vec{N}$ est A

(i) Loi de la résultante dynamique dans le référentiel (R) galiléen.

$$\sum_{ext} \text{forces sur la barre} = m\,\vec{a}(G) = m\,\vec{a}(M)$$

ici $$m\vec{g} + \vec{N} = m\,\vec{a}(M) \quad (1)$$

$m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont // (Oy) $\Rightarrow$ $\vec{a}(M) \,//\, (Oy)$ $\quad \vec{a}(y) = a(y)\,\vec{u_y}$

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = \int_0^t a(y)\,\vec{u_y}\,dt + \underbrace{\vec{v}(t=0)}_{=0} \leftarrow \text{condition initiale}$$

$$= \vec{u_y}\int_0^t a(y)\,dt \quad \text{donc } \vec{v}(M) \,//\, \vec{u_y}$$

la trajectoire de M est donc // (Oy) ⇒ le mouvement de M est vertical

on peut donc écrire $\overrightarrow{OM} = y_M\,\vec{u_y}$ (2)

(ii) le triangle (OAM) est rectangle en O donc $y_M = l\cos\theta$ (3)

Soit (R^*) le référentiel barycentrique ((R^*) est centré en $M \equiv G$ et en translation par rapport à (R)), dans (R^*) on peut utiliser le th. du moment cinétique (m̂ si (R^*) n'est pas galiléen) cf. cours :

$$\left(\frac{d\vec{L}_G}{dt}\right)_{/(R^*)} = \sum \overrightarrow{\text{Moments des forces réelles extérieures sur barre}}_{\text{par rapport à } G \equiv M}$$

- moment du poids $\vec{\mathcal{M}}_{/H}(m\vec{g}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$ ∠5

- moment de $\vec{N}$: $\vec{\mathcal{M}}_{/H}(\vec{N}) = \vec{HA} \wedge \vec{N} = \ell N \sin\theta \, \vec{u_z}$ (4)

avec $N = \|\vec{N}\|$ qui peut être déterminer à partir de (1)

en effet d'après (2) $\vec{OH} = y_H \vec{u_y}$ donc $\vec{a}(H) = \ddot{y}_H \vec{u_y}$

donc d'après (1) : $(-mg + N)\vec{u_y} = m\ddot{y}_H \vec{u_y}$

donc $N = m\ddot{y}_H + mg$ (5)

d'après (3) : $\dot{y}_H = \frac{d}{dt} y_H = -\dot{\theta}\,\ell \sin\theta$

et donc $\ddot{y}_H = -\dot{\theta}^2 \ell \cos\theta - \ddot{\theta}\,\ell \sin\theta$ (6)

le moment de $\vec{N}$ en fonction de θ et de ses dérivées temporelles est donc

d'après (4), (5) et (6) $\vec{\mathcal{M}}_{/H}(\vec{N}) = m\ell\left(g - \dot{\theta}^2 \ell \cos\theta - \ddot{\theta}\,\ell \sin\theta\right) \sin\theta \, \vec{u_z}$ (7)

Moment cinétique de la barre dans (R) $\vec{L}_{/G \equiv H} = \vec{L^*}$ dans (R^*)

dans (R^*) la barre est en rotation autour de l'axe $(Hz) = (Gz)$

donc $\vec{L^*} = J_{(Gz)}\,\dot{\theta}\,\vec{u_z}$ (8) avec $J_{(Gz)} = \frac{1}{12} m(2\ell)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2$

Ainsi le th du moment cinétique s'écrit : d'après (7) et (8)

$$\frac{1}{3} \cancel{m} \ell^{2} \ddot{\theta} = \cancel{m}\ell\left(g - \dot{\theta}^2 \ell \cos\theta - \ddot{\theta}\,\ell \sin\theta\right) \sin\theta \qquad (9)$$

l'équation différentielle vérifiée par θ.

b) En utilisant le th. de l'énergie cinétique $\Delta E_c = \sum_{\text{forces}} \text{travaux}$

$E_c = \frac{1}{2} m\, v(\underset{G}{\overset{}{H}})^2 + E_c^*$ dans Ref (R^*) $E_c^* = \frac{1}{2} J_{(Gz)}\,\dot{\theta}^2$

dans (R)

et $v(H)^2 = \dot{y}_H^2 = \dot{\theta}^2 \ell^2 (\sin\theta)^2$

donc $E_c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 (\sin\theta)^2 m + \frac{1}{6} m\ell^2 \dot{\theta}^2$ (10) dans (R)

/6

- travail de $\vec{N}$: $W(\vec{N}) = \vec{0}$ car $\vec{N} \perp$ au déplacement de A (point d'application de $\vec{N}$)

$G \equiv M$

- travail du poids $m\vec{g}$: $W(m\vec{g}) = -mg\,\Delta y$ (de G)

$$= mg\,(\ell - y_M) > 0$$

$W(m\vec{g}) > 0$ car le poids est dans le sens du déplacement

donc le th. de l'énergie cinétique dans (R) galiléen s'écrit

$$E_c(\theta) - E_c(\theta=0) = mg(\ell - y_M) \underset{\uparrow (3)}{=} mg\,\ell(1-\cos\theta)$$

$E_c(\theta=0) = 0$ car initialement $\dot{y}_M = 0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$

donc d'après (10) :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \ell (\sin\theta)^2 + \frac{1}{6}\ell\dot{\theta}^2 = g(1-\cos\theta) \qquad (11)$$

En dérivant cette relation par rapport au temps

$$\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\ell(\sin\theta)^2 + \dot{\theta}^3\ell(\cos\theta)\sin\theta + \frac{1}{3}\ell\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ell\ddot{\theta} = \left(g - \ddot{\theta}\ell\sin\theta - \dot{\theta}^2\ell\cos\theta\right)\sin\theta$$

on retrouve bien l'équation (9)

c) Pour déterminer la vitesse de M lorsque M touche le sol $(\theta = \frac{\pi}{2})$ il faut utiliser l'éq. (11) et non l'équation (9) (car (9) contient $\ddot{\theta}$) :

d'après (11) lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\dot{\theta} = \dot{\theta}_f \leftarrow$ final

$$\dot{\theta}_f^2\left(\frac{1}{2}\ell + \frac{1}{6}\ell\right) = g \quad \text{soit} \quad \dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}$$

$$\text{donc } \underset{\uparrow \text{final}}{v_f(M)} = -\dot{\theta}_f\,\ell\sin\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-\sqrt{\frac{3}{2}\ell g}}}$$

< 0 car vers le bas.