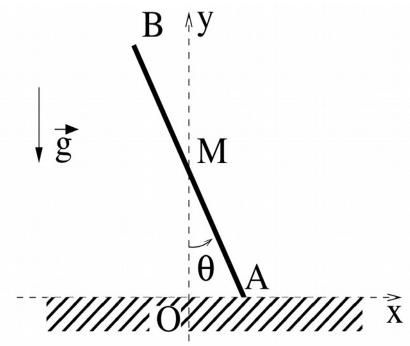
Travaux dirigés : Série IV : Exercices complémentaires

corrigés : https://trambly.u-cergy.fr/L2MecaSol/index.html

Exercice 1 : chute d'une barre sur une patinoire *(exercice classique, partiel de novembre 2008)*



Une barre rigide AB, homogène de masse *m,* de longueur 2*l* et de section négligeable, est posée verticalement sur une patinoire horizontale. Le contact entre la barre et la patinoire en A est supposé sans frottement (glissement parfait). Soit θ l'angle que fait la barre par rapport à la verticale (voir figure).

A l'instant initial, la barre est très légèrement déplacée (sans vitesse initiale) de son équilibre instable et tombe.

a) En utilisant le théorème de la résultante dynamique (lois de Newton) et le théorème du moment cinétique :

(i) Montrer que le mouvement du milieu M de AB est vertical.

(ii) Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

b) En utilisant l'énergie, retrouver l'équation différentielle précédente.

c) Déterminer la vitesse de M lorsque M touche le sol.

Donnée : Le moment d'inertie d'une barre de longueur L, homogène de masse m, par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de gravité est $mL^2/12$.

Exercice 2. Chasse-neige *(exercice long mais bien)*

Un chasse-neige est schématisé par l'ensemble (S) des trois solides, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (Cf. schéma) :

- (S_1) est une roue de masse m, d'épaisseur négligeable, de rayon b, centrée en A.
- (S_2) est une tige rigide horizontale AB, de masse négligeable et de longueur 2b.
- (S_3) est une tige rigide verticale CJ, homogène de masse m et de longueur 2b.

L'axe (Ay) de la roue (S_1) est fixé sur la tige (S_2) en A. La roue (S_1) tourne sans frottement autour de son axe sans glisser sur le sol en I. La tige (S_2) est soudée de façon rigide à la tige (S_3) en B milieu de (S_3). Le solide (S_3) glisse sur le sol en J. On suppose que les coefficients de frottement f statique et dynamique sont identiques et sont les mêmes en I et J, avec $0{,}7 < f < 1$.

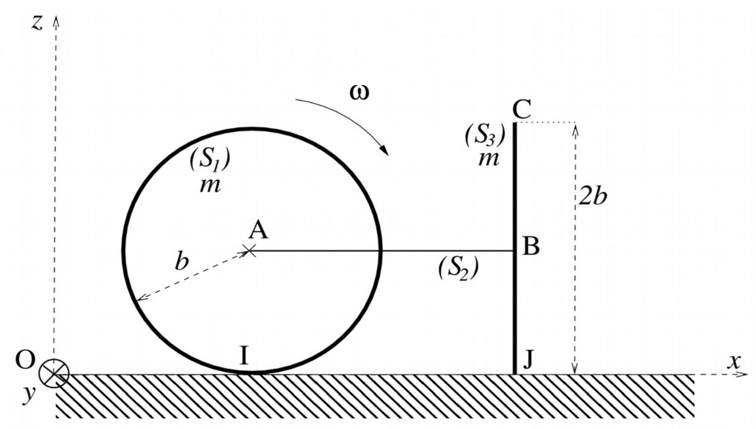
Le chasse-neige se déplace horizontalement le long de la droite (Ox). Pour cela, le moteur du chasse-neige exerce sur la roue un couple de moment $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_y$ constant, avec $\Gamma > 0$.

a) Montrer que le centre de masse G de (S) est au milieu de [AB].

b) Appliquer le théorème du moment cinétique en A pour (S_1).

c) Appliquer le théorème du moment cinétique en G pour (S).

d) En supposant que le chasse-neige avance sans glisser en I à partir d'une vitesse initiale nulle, déterminer la vitesse du chasse-neige à l'instant t.

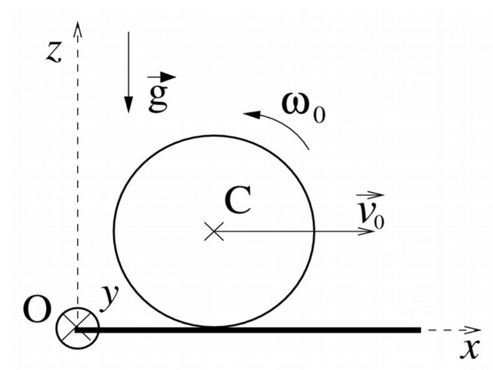


e) À quelle condition sur Γ le chasse-neige avance-t-il ? À quelle condition sur Γ ne glisse-t-il pas ?

Donnée : On supposera que moment d'inertie J de la roue (S_1) par rapport à son axe de symétrie (Ay) est mb^2 (roue creuse : sa masse est répartie sur l'anneau, de centre A et de rayon b).

Exercice 3. Effet rétro d'une boule de billard *(très bien)*

Une boule homogène, de masse *M*, de centre C et de rayon *R*, est lancée sur un tapis de billard horizontal dans les conditions initiales suivantes (voir figure pour les vecteurs de la base) :[1]



- Vitesse de C : $\vec{v}_C(t=0) = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$,
- Vitesse angulaire du cerceau autour de C : $\vec{\Omega}(t=0) = -\omega_0 \vec{u}_y$ avec $\omega_0 > 0$.

On suppose que la boule reste toujours en contact avec le tapis. Ce contact est caractérisé par des coefficients de frottement statique et dynamique supposés égaux : $f_d = f_s = f$.

a) Déterminer la vitesse de glissement initiale (à *t* = 0).

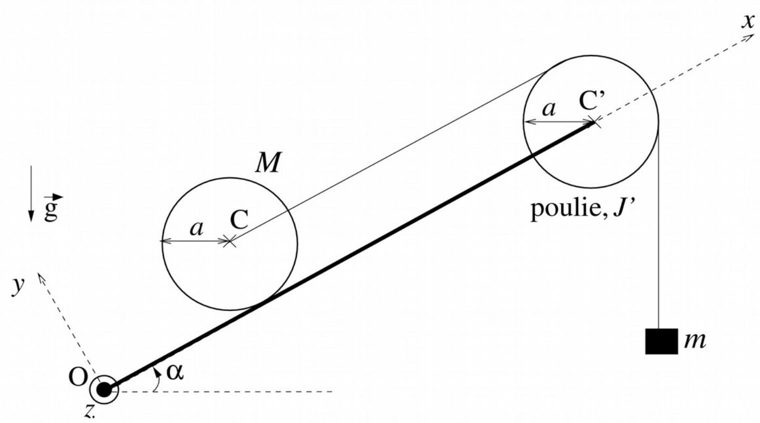
b) Montrer que le mouvement de la boule est rectiligne.

c) Pour la première phase du mouvement, déterminer la vitesse $\vec{v}_C(t)$ du centre C de la boule et le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(t)$ de la boule. A quel instant cette phase s'achève-t-elle ?

d) Déterminer $\vec{v}_C(t)$ et $\vec{\Omega}(t)$ pour la deuxième phase du mouvement. A quelle condition la boule revient-elle en arrière (*effet rétro*) ?

Exercice 4 : Mouvement d'un disque tiré le long d'un plan incliné *(classique, session 2 de juin 2009)*

Un disque plein homogène de centre C, de rayon *a* et de masse *M*, roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. On supposera que l'axe du disque reste horizontal (disque vertical). En son centre est attaché un fil inextensible, sans masse, parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné. Le fil passe dans la gorge d'une poulie de rayon *a*' = *a* et de centre C'. Le fil ne glisse pas sur la poulie. L'autre extrémité du fil est attachée à un solide de masse *m* suspendu dans le vide. On note *J'* le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe. Le disque et la poulie peuvent tourner librement (sans frottement) autour de leurs axes respectifs. Initialement, le système est immobile.



1 *Ces conditions initiales sont obtenues lorsque la boule est frappée, d'un coup sec, en dessous de son centre de gravité C, par une queue de billard horizontale (mouvement de gauche à droite sur la figure).*

a) Montrer que le moment d'inertie J du disque par rapport à son axe (C,z) est $J = Ma^2/2$.

b) Soient ω la vitesse angulaire du disque et ω' celle de la poulie. Quelle relation existe-t-il entre ces vitesses angulaires et la vitesse du centre C du disque ?

c) Soient $\vec{T}_1$ la force du fil sur le disque et $\vec{T}_2$ la force du fil sur la masse m. En appliquant le théorème du moment cinétique à la poulie, déterminer une relation entre les normes de ces deux forces.

d) Calculer l'accélération du centre C du disque en fonction de M, m, J, J', a et α, par deux méthodes différentes :

   (i) En utilisant le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique appliqués au disque et/ou à la masse m.

   (ii) En utilisant un théorème d'énergie.

e) A quelle condition le disque monte-t-il ?

f) On suppose maintenant que la poulie est idéale ($J' = 0$) et que $M = m$. On note μ le coefficient de frottement statique du disque sur le plan. A quelle condition le disque ne glisse-t-il pas sur le plan incliné ?

Exercice 5 : Roue entraînée par un moteur *(à bien comprendre, petit contrôle de 15 octobre 2012)*

Une roue homogène de masse m, de rayon b, est entraînée par un moteur qui produit sur son axe un couple de force de moment $\vec{\Gamma} = -\Gamma\,\vec{u}_z$, avec Γ une constante positive. On négligera le poids du moteur. La roue se déplace sans glisser sur un plan horizontal le long de l'axe (0;x). La roue reste dans le plan (O;$x;y$). Soit μ le coefficient de frottement statique entre la roue et le sol.

1) On suppose que la masse de la roue est répartie uniquement sur le périmètre de la roue. Calculer le moment d'inertie J de la roue par rapport à son axe.
2) Déterminer la relation entre la vitesse angulaire ω de la roue et la vitesse de son centre C.
3) En plus de l'action du moteur, quelles sont les forces qui agissent sur la roue ?
4) Écrire le principe fondamental de la dynamique (théorème de la résultante cinétique).
5) Écrire le théorème du moment cinétique.
6) En déduire l'accélération du centre C de la roue et la force de frottement du sol sur la roue. Tracer cette force sur un schéma (pour $\Gamma > 0$). Que vaut-elle lorsque $\Gamma = 0$?
7) A quelle condition sur Γ le mouvement de la roue est-il bien sans glissement ? Commentaire.