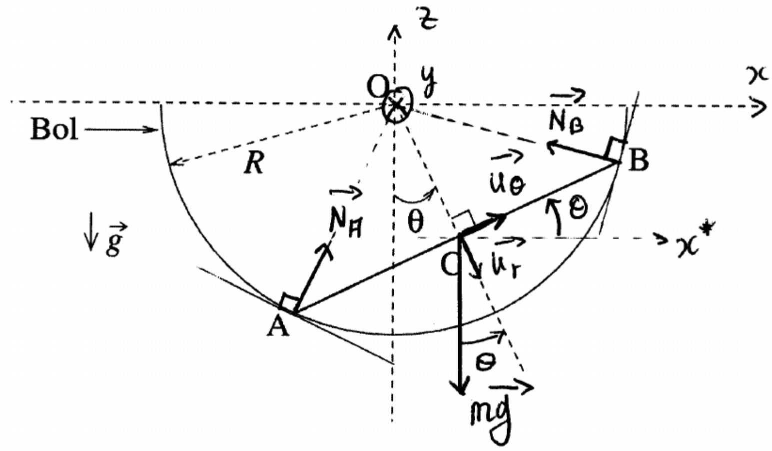
<u>Corrigé de l'exercice 6 (série 3)</u> : **Oscillation d'une barre dans un bol**



pas de frottement en A et B

$\vec{N_A}$ et $\vec{N_B}$ $\perp$ surface du bol

C : centre de gravité de la barre

Relation géométrique triangle rectangle (OCB) : $OB^2 = OC^2 + CB^2$

$R^2 = OC^2 + \ell^2$

donc $OC = c^{te} = \sqrt{R^2 - \ell^2} = b$

Le mouvement de C est sur un cercle de rayon $OC = b$, de centre O

$\vec{v}(C) = \frac{d\vec{OC}}{dt} = b\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ en coordonnées polaires.

Energie cinétique de la barre (AB) : th de Koenig : $E_c = \frac{1}{2} m V(C)^2 + E_c^*$

avec l'énergie cinétique barycentrique $E_c^* = \frac{1}{2} J \Omega^2$ car dans (R^*) la barre tourne autour de l'axe (Cy) à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$.

donc $E_c = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2$ dans $R(O,x,y,z)$

car $J = \frac{1}{12} m (2\ell)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2$

soit $E_c = \frac{1}{2} m \left(R^2 - \frac{2}{3}\ell^2\right) \dot{\theta}^2$

dans (R) Galiléen : th de la puissance cinétique $\frac{dE_c}{dt} = \sum$ Puissance des forces

forces sur la barre :
- $\vec{N_A}$ point d'application A et $\vec{v}(A) \perp \vec{N_A}$ => $\vec{N_A}$ ne travaille pas
- $\vec{N_B}$ 〃 B $\vec{v}(B) \perp \vec{N_B}$ => $\vec{N_B}$ 〃
- $m\vec{g}$ 〃 C : puissance $\mathcal{P}(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \vec{v}(C)$

$= mg\, v(C) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$= -mg\, v(C) \sin\theta$

ainsi $\dfrac{dE_c}{dt} = -mg\, v(c) \sin\theta$

soit $\cancel{\dfrac{1}{2}}\, \cancel{m} \left(R^2 - \dfrac{2}{3}\ell^2\right) \cancel{2}\, \cancel{\dot\theta}\, \ddot\theta = -\cancel{m}g \sqrt{R^2-\ell^2}\, \cancel{\dot\theta} \sin\theta$

$$\ddot\theta = -g \frac{\sqrt{R^2-\ell^2}}{R^2 - \frac{2}{3}\ell^2} \sin\theta$$ éq. différentielle du mouvement de la barre.

soit la constante $k = \sqrt{\dfrac{g\sqrt{R^2-\ell^2}}{R^2-\frac{2}{3}\ell^2}} > 0$: $\ddot\theta = -k^2 \sin\theta$

dans la limite des petits angles : $\ddot\theta \simeq -k^2\theta$ (car $\sin\theta \simeq \theta$)

Donc les solutions sont $\theta(t) = A\cos(kt + \varphi)$ avec A et φ 2 constantes

la période de $\theta(t)$ est $T = \dfrac{2\pi}{k}$

soit $$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 - \frac{2}{3}\ell^2}{g\sqrt{R^2-\ell^2}}}}$$