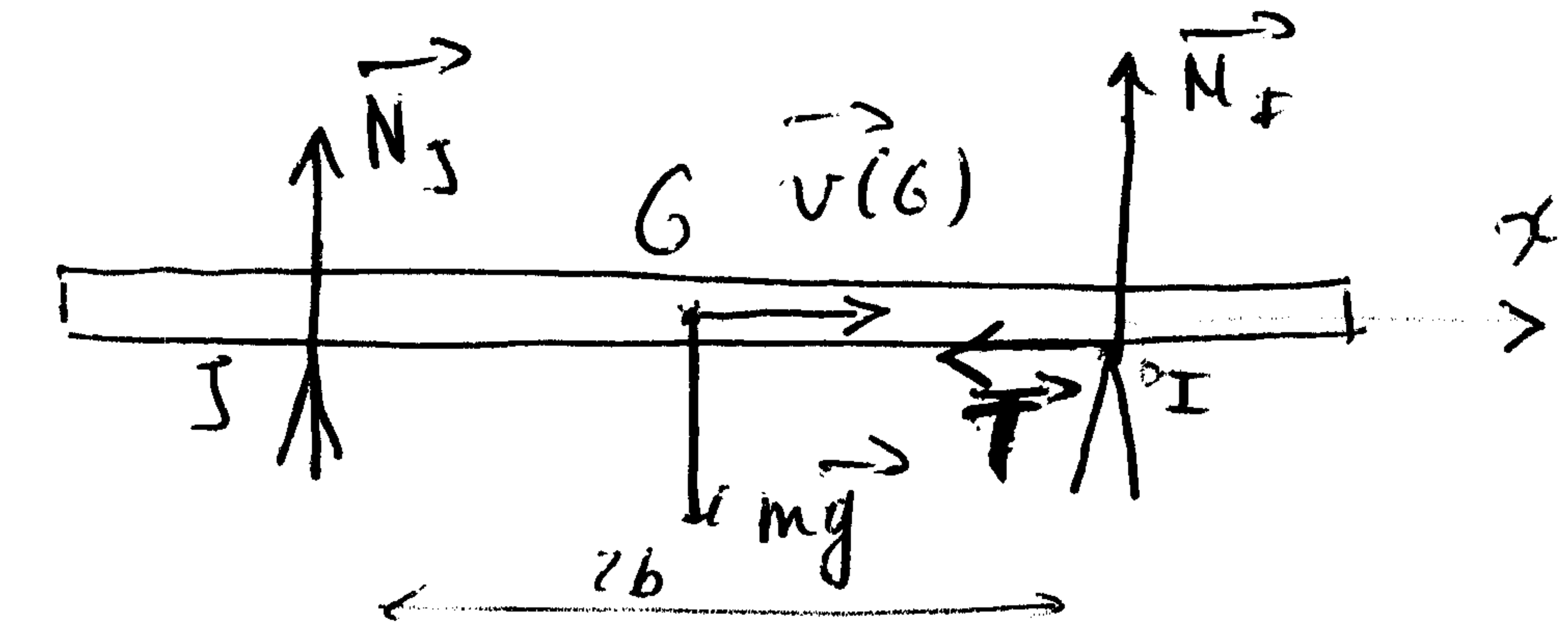
Ex 5. Glissement d'une barre sur deux supports ①

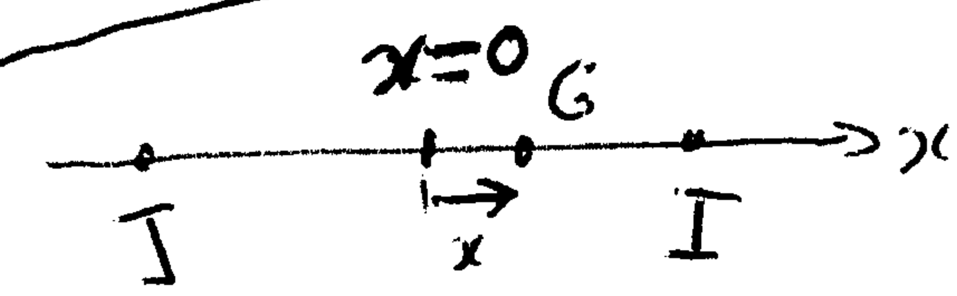
1)



$\vec{v}$ (barre) $= \vec{v}(G)$ translation

temps

à t intermédiaire
Soit x la position de G
par rapport à sa position initiale



$JG = b + x \qquad GI = b - x$

Th de l'énergie cinétique ΔE_c (barre) $= \sum$ travaux forces ①

entre $t_{initial} = 0$ et t_f qd G est en I avec $v(t_f) = 0$
$\underbrace{\text{G est en I}}_{\text{final}}$

dynamique

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Seule Force qui travaille $\vec{T}$: frottement en I avec $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N_I}\|$

si $\vec{T} = -T\,\vec{u_x}$ et $\vec{N_I} = N_I\,\vec{u_y} \Rightarrow \vec{T} = -f N_I\,\vec{u_x}$

$$W(\vec{T}) = +\int_{t_i}^{t_f} \vec{T}\cdot d\vec{\ell} \qquad \text{avec } d\vec{\ell} = dx\,\vec{u_x}$$

$$= -f\int N_I\,dx \quad ② \quad \text{il faut déterminer } N_I(x)$$

dans le Réf barycentrique $\left(\dfrac{d\vec{L_G^*}}{dt}\right)_{R^*} = \vec{0}$ car mvt rectiligne.
car pas de rotation dans (R^*)

//

mais aussi dans (R) $\rightarrow \left(\dfrac{d\vec{L_G}}{dt}\right)_R = \sum \overrightarrow{\text{moment forces ext}} = \vec{0}$

$$\rightarrow \vec{L_G}_R = \vec{0} = \vec{GG}\wedge m\vec{v}(G)$$

donc $(b-x)N_I - (b+x)N_J = 0$ ③

On doit trouver une relation supplémentaire entre N_I et N_J : $\begin{cases} N_J = mg - N_I \\ m\ddot{x} = -T \end{cases}$

$\sum \overrightarrow{\text{force ext}} = m\vec{a}(G) \Rightarrow m\ddot{x}\,\vec{u_x} = \vec{N_I} + \vec{N_J} + m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow$
dans (R)

Donc ③ devient $(b-x)N_I - (b+x)(mg - N_I) = 0$

$$\Rightarrow N_I = mg\,\frac{b+x}{2b} \quad ④$$

Donc l'équation (1) avec (2) et (4) s'écrit

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = - \int T\,dx = - f \frac{mg}{2b} \int_0^b (b+x)\,dx$$

soit $\frac{1}{2} m v_0^2 = f \frac{mg}{2b} \left(b^2 + \frac{1}{2} b^2\right)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} f g b}}}$$

b) Equation différentielle dont $x(t)$ est solution :

$$m \ddot{x} = -T = -\frac{f m g}{2b}(b + x)$$

$$\ddot{x} + \frac{fg}{2b} x = -\frac{fg}{2}$$ éq dif. du 2 ordre avec coéf constants et 2^e membre

solution de $\ddot{x} + \frac{fg}{2b} x = 0$: $x(t) = A \cos kt + B \sin kt$
avec $k = \sqrt{fg/2b}$ A et B c^{te}

solution particulière : $x = -b$

Donc $x(t) = -b + A \cos kt + B \sin kt$

à $t=0$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = b \\ B = v_0 / k \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -b + b \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt \\ \dot{x}(t) = -kb \sin kt + v_0 \cos kt \end{cases}$$

à $t = t_1$: $\begin{cases} x(t) = b \\ \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -b + b \cos kt_1 + \frac{v_0}{k} \sin kt_1 \\ -kb \sin kt_1 + v_0 \cos kt = 0 \end{cases}$

final

$$\tan kt_1 = \frac{\sin kt_1}{\cos kt_1} = \frac{v_0}{kb}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_1 = \frac{1}{k} \mathrm{Arc}\tan\left(v_0 / kb\right)}}$$