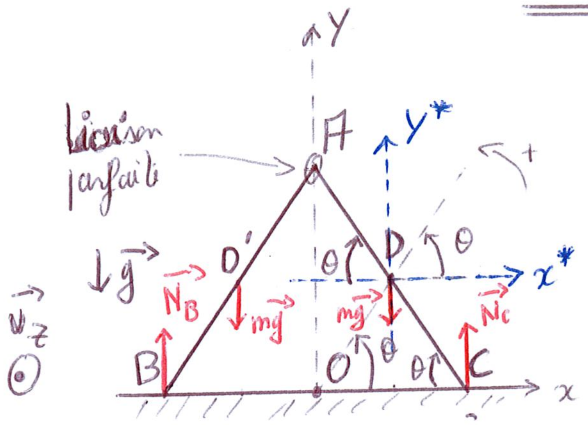
Série n°3 : Ex 4

Echelle double



$h = AB = AC$

- L'échelle double glisse en B et C sans frottement sur le sol horizontal.
- Les barres AB et AC étant identiques, leur mouvement est symétrique par rapport à l'axe (O,y) et A reste sur l'axe (O,Y) pendant la chute.

a) Dans (O,x,y) : $A(0, y_A)$ et $C(x_c ; 0)$ donc $AC = \sqrt{x_c^2 + y_A^2} = h$

D est milieu de $[A,C]$ donc $D\left(\frac{x_c}{2} ; \frac{y_A}{2}\right) \Rightarrow OD = \frac{1}{2}\sqrt{x_c^2 + y_A^2} = \frac{h}{2}$

$\underline{OD = h/2}$: le mouvement de D est donc sur un cercle de centre O et de rayon $\frac{h}{2}$.

b) Le mouvement des barres AC et BA étant symétriques par rapport à (O,y) et les 2 barres étant identiques, leur énergies cinétiques ~~sont~~ sont identiques.

E_c (échelle double) $= E_c$ (barre AC) $+ E_c$ (barre BA) $= 2\, E_c$ (barre AC)

On travail dans R référentiel lié au sol $R(O, x, y, z)$

Soit R^*_{AB} le référentiel barycentrique de la barre AB : $R^*_{AB}(D, x^*, y^*, z^*)$

Dans R^*_{AB} la barre AB tourne autour de (Dz^*) à la vitesse angulaire $-\dot{\theta}$

donc $\vec{\Omega}^* = -\dot{\theta}\, \vec{u}_{z^*} = -\dot{\theta}\, \vec{u}_z = \vec{\Omega}$ dans R. (Rmq : quand la barre tombe $\dot{\theta} < 0$)

Ainsi $E_c^*(AB) = \frac{1}{2} J_{AB/(Dz^*)}\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\, \frac{1}{12}\, m h^2\, \dot{\theta}^2$

D'après le th. de Kœnig $\underset{\text{dans } R}{E_c(AB)} = E_c^*(AB) + \frac{1}{2} m\, V(D)^2$

$\vec{V}(D) = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{2}\vec{u_r}\right) = \frac{h}{2}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ donc $E_c(AB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m h^2 + m\frac{h^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$

Donc E_c (échelle double) $= E_c = 2\, E_c(AB) = \frac{1}{3} m h^2 \dot{\theta}^2$

c) Th de la puissance cinétique : (Rmq : on peut aussi utiliser $\Delta E_c = \sum$ travaux forces)

$$\frac{d}{dt}(E_c) = \sum \text{Puissance}(\text{force extérieures} + \text{force intérieures}) \quad (*)$$

pour un système quelconque.

L'échelle double n'est pas un solide indéformable, mais les forces de contact entre les 2 échelles (en A) ne travaillent pas (liaison parfaite) donc $\mathcal{P}$(force intérieure de l'échelle double) = 0.

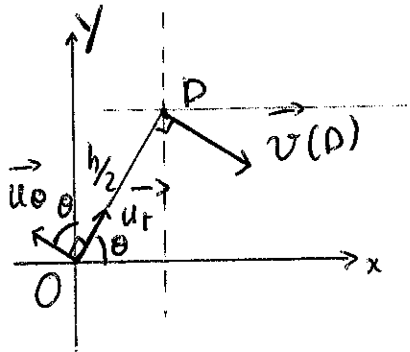
Force sur l'échelle double : • $m\vec{g}$ en D • mg en D' milieu de [BA]

• $\vec{N_B}$ en B • N_C en C (qui ne travaillent pas)

$$\sum \mathcal{P}(\text{forces}) = \underbrace{m\vec{g}\cdot\vec{v}(D) + m\vec{g}\cdot\vec{v}(D')}_{=\text{ par symétrie}} + \underbrace{\vec{N_B}\cdot\vec{v}(B)}_{=0 \text{ car } \perp} + \underbrace{\vec{N_C}\cdot\vec{v}(C)}_{=0 \text{ car } \perp}$$

$$= 2m\vec{g}\cdot\vec{v}(D) = -2\dot{\theta}\,\frac{h}{2}\,mg\,\underbrace{\vec{u_y}\cdot\vec{u_\theta}}_{\cos\theta}$$

$$= -\dot{\theta}\,h\,mg\cos\theta$$



ainsi d'après (*) et la question b :

$$2\frac{1}{3}mh^2\ddot{\theta}\cancel{\dot{\theta}} = -\cancel{\dot{\theta}}\,h\,mg\cos\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{2h}\cos\theta = 0}$$

d) Cette équation s'intègre en la multipliant en $\dot\theta$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta\,\ddot{\theta} + \int_{\theta_i}^{\theta_f}\frac{3g}{2h}\,d\theta\cos\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}_f^2 - \dot{\theta}_i^2\right) = -\frac{3g}{2h}\left(\sin\theta_f - \sin\theta_i\right)$$

avec $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ (initial) $\dot{\theta}_i = 0$ (vitesse initiale = 0)

et $\theta_f = 0$ donc $\dot{\theta}_f^2 = \frac{3g}{h}$ donc $\dot{\theta}_f = -\sqrt{\frac{3g}{h}}$

car $\dot{\theta} < 0$ pendant la chute.

or $\vec{OA} = y_A\,\vec{u_y} = 2\,OD\sin\theta\,\vec{u_y}$

$= h\sin\theta\,\vec{u_y}$

donc $\vec{v}(A) = h\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u_y}$

ainsi la vitesse de A quand il touche le sol est :

$\vec{v_f}(A) = h\,\dot{\theta}_f\cos\theta_f\,\vec{u_y}$

$$\boxed{\vec{v_f}(A) = -\sqrt{3gh}\,\vec{u_y}}$$