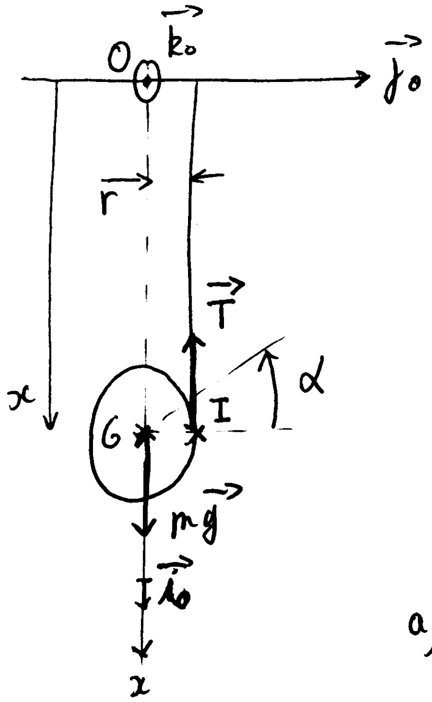
Méca Solide | Série III - Ex. 3 Yo-Yo



Repère $R(O, \vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0})$

Réf. Galiléen

α : position angulaire d'un point du Yoyo par rapport à l'horizontale

x : position de G : centre de gravité du Yoyo

a) <u>Relation entre α et x :</u>

lorsque le yoyo tourne de α, x augmente de αr (si α est en radian)

donc : $\boxed{x = \alpha r + x_0}$ (1) — constante qui dépend des conditions initiales

[Rmq : le yoyo est équivalent à une roue qui tourne sans glisser sur un fil vertical]

b) Principe fondamental de la dynamique dans (R) galiléen :

$$\sum \text{forces (sur Yoyo) extérieures} = m \frac{d}{dt}\vec{v}(G) \quad \text{avec } \vec{v}(G) = \dot{x}\,\vec{i_0}$$

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\ddot{x}\,\vec{i_0} \quad \text{avec } \vec{T} = -T\,\vec{i_0} \quad (T>0)$$
$$\vec{g} = g\,\vec{i_0}$$

donc $\underline{mg - T = m\ddot{x}}$ (2)

Il faut connaître T ; pour cela on peut utiliser le th. du moment cinétique barycentrique (dans réf barycentrique ou dans (R) en G)

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_G(\text{YoYo}) = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\text{forces ext sur Yoyo}) \quad (3)$$

En projection sur l'axe orienté $(G, \vec{k_0})$ de direction fixe : $\frac{d}{dt}L_{(G,\vec{k_0})} = \sum \mathcal{M}_{G,\vec{k_0}}(\text{forces})$

⚠ signe

$$L_{(G,k_0)} = I\dot{\alpha} \Rightarrow \vec{L}_G = J\dot{\alpha}\,\vec{k_0} \quad (4)$$

du YoYo — par symétrie

$$\vec{\mathcal{M}}_G(m\vec{g}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T}) = \vec{GI} \wedge \vec{T} = rT\,\vec{k_0} > 0$$

car $\vec{T}$ fait tourner le yoyo vers $\alpha > 0$

Donc d'après eq. (3) et (4) $\quad J\ddot{\alpha} = rT$

en remplaçant T dans (2), on obtient : $\quad mg - \frac{J}{r}\ddot{\alpha} = m\ddot{x} \quad (6)$

D'après (1) : $\quad \ddot{x} = \ddot{\alpha}\, r \quad (7)$

d'où $\quad mg = \left(\frac{J}{r^2} + m\right)\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{x} = g\frac{1}{\left(\frac{J}{mr^2}+1\right)}}} \quad (8)$

Il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$v(G) = \dot{x} = g\frac{1}{\left(\frac{J}{mr^2}+1\right)}t + V_0$$

$V_0 = 0$ condition initiale

$$\boxed{x = \frac{1}{2}gt^2\,1\Big/\left(\frac{J}{mr^2}+1\right)} + 0$$

0 condition initiale

et $\alpha = \frac{x}{r} + c^{te}$ ← condition initiale

Lorsque le fil est entièrement déroulé : $x = l$ et $t = t_1$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}\left(1 + \frac{J}{mr^2}\right)}$$

en t_1 : $\quad \underline{\underline{v(G) = \dot{x}(t_1) = \sqrt{\frac{2lg}{1+J/mr^2}}}}$

et vitesse angulaire

$$\underline{\underline{\dot{\alpha}(t_1) = \frac{\dot{x}(t_1)}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2lg}{1+J/mr^2}}}}$$

c) Retrouver l'éq (8) par l'énergie

Energie cinétique du Yoyo :

Th. Koenig : $E_c(Yoyo) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{barycentrique}}}{E_c^*}(Yoyo) + \frac{1}{2} m V(G)^2_{/R}$

Dans son référentiel barycentrique (R^*) le yoyo tourne autour de $(G\,\vec{k_o})$ à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ (car (R^*) en translation par rapport à (R))

donc $E^*(Yoyo) = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$

donc $E_c = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

La force $\vec{T}$ ne travaille pas, car le point d'application de T ne bouge pas (c'est comme le contact entre 2 solides sans glissement)

La force $m\vec{g}$ travaille : sa puissance dans (R) est $\mathcal{P}(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \dot{x}\vec{i_o}$
$= mg\dot{x} > 0$

force motrice

le th de la puissance cinétique dans (R) Galiléen s'écrit

$$\frac{d}{dt} E_c = \mathcal{P}(m\vec{g}) \Rightarrow J\ddot{\alpha}\dot{\alpha} + m\ddot{x}\dot{x} = mg\dot{x}$$

or $\ddot{\alpha} = \frac{\ddot{x}}{r}$ et $\dot{\alpha} = \frac{\dot{x}}{r}$ d'après (1)

donc $\frac{J}{r^2}\ddot{x} + m\ddot{x} = mg \Rightarrow$ équation (8)

d) Yoyo composé de 3 disques donc

ρ : masse volumique

$J = 2J_1 + J_2$ et on sait (cf TD) $J_{\text{cercle}} = \frac{1}{2} M (\text{Rayon})^2$

$J_1 = J$ (disque d'épaisseur b de rayon R) $= \frac{1}{2} m_1 R^2$ avec $m_1 = \pi R^2 b \rho$

$J_2 = J$ (disque d'épaisse $(B-2b)$ de rayon r) $J_2 = \frac{1}{2} m_2 r^2$ avec $m_2 = \pi r^2 (B-2b)\rho$

et $m = 2m_1 + m_2$ donc $\boxed{k = \frac{J}{mr^2} = \frac{2R^4 b + r^4(B-2b)}{4R^2 b r^2 + 2r^4(B-2b)}}$

AN : $k = 7,6\ldots$