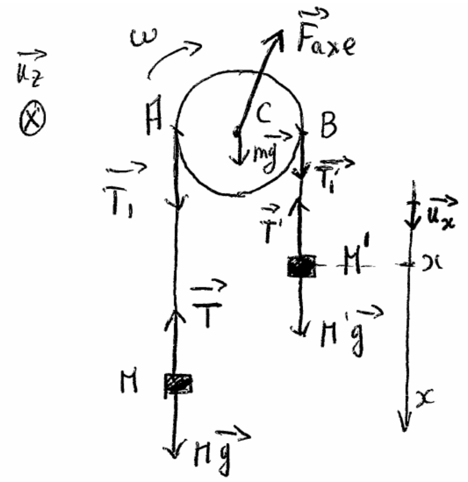
Corrigé de l'exercice 2 (série 3) : **Machine d'Atwood**



- forces sur M' : $M'\vec{g}$ et $\vec{T}'$
- forces sur M : $M\vec{g}$ et $\vec{T}$
- forces sur la poulie : $\vec{T_1}$, et $\vec{T_1}'$, $\vec{F}_{axe}$, $m\vec{g}$

le long d'un fil, de masse nulle, la tension est conservée donc $\vec{T_1} = -\vec{T}$ et $\vec{T_1}' = -\vec{T}'$

mais $\vec{T_1} \neq \vec{T_1}'$ ⚠

Soit x la position verticale de M' : vitesse de M' : $\dot{x}\,\vec{u_x}$

" de M : $-\dot{x}\,\vec{u_x}$

le fil ne glisse pas (sur la poulie) donc la poulie tourne à la vitesse (angulaire) $\omega = \dot{x}/b$ (1)

a) Dans (R), réf. du sol (Galiléen) :

$$\sum \vec{\text{forces sur } M'} = M'\ddot{x}\,\vec{u_x} = \vec{T}' + M'\vec{g}$$

$$\sum \vec{\text{forces sur } M} = -M\ddot{x}\,\vec{u_x} = \vec{T} + M\vec{g}$$

avec $\vec{T} = -T\vec{u_x}$; et $\vec{T}' = -T'\vec{u_x}$ on obtient $M'\ddot{x} = -T' + M'g$ (2)

($\vec{T_1} = T\vec{u_x}$ et $\vec{T_1}' = T'\vec{u_x}$) et $-M\ddot{x} = -T + Mg$ (3)

th. du moment cinétique pour la poulie : $\dfrac{d}{dt}\vec{L_C} = \underbrace{\vec{CC}\wedge\vec{F}_{axe}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{CC}\wedge m\vec{g}}_{=\vec{0}} + \vec{CA}\wedge\vec{T_1} + \vec{CB}\wedge\vec{T_1}'$

soit $J\dot{\omega}\,\vec{u_z} = (-Tb + T'b)\vec{u_z} \overset{\text{avec (2) et (3)}}{=} \left(-b(M+M')\ddot{x} - Mbg + M'bg\right)\vec{u_z}$

avec (1) $\Rightarrow \left(\dfrac{J}{b^2} + M + M'\right)\ddot{x} = (M'-M)g$ soit $\boxed{\ddot{x} = \dfrac{(M'-M)\,g}{M+M'+J/b^2}}$

b) Energie cinétique de l'ensemble {fil, poulie, M, M'} : E_C

$E_C = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M'\dot{x}^2$

Seuls les poids de M et M' travaillent

} th. puissance cinétique : $\dfrac{d}{dt}E_C = M\vec{g}\cdot\vec{v_M} + M'\vec{g}\cdot\vec{v_{M'}}$

donc $\left(\dfrac{J}{b^2} + M + M'\right)\ddot{x}\,\dot{x} = (M'-M)\,g\,\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \dfrac{M'-M}{M+M'+J/b^2}\,g}$