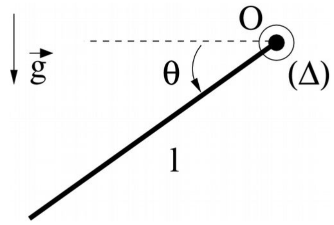
Travaux dirigés : série n°III

Exercice 1 :

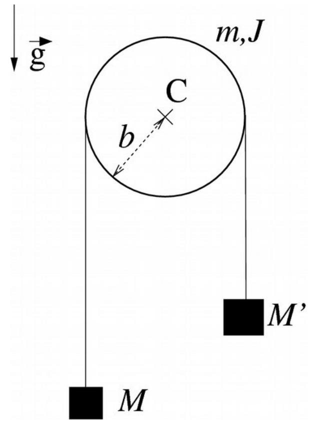


Une barre homogène de masse *m* de longueur *l* et de section négligeable, peut tourner librement autour d'un axe horizontal (Δ). La barre est attachée en son extrémité O à (Δ). A *t* = O, la barre est horizontale et lâchée avec une vitesse nulle.

a) Calculer le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Δ).

b) Calculer $\dot{\theta}$ en fonction de θ. En déduire $\ddot{\theta}$ en fonction de θ.

c) Déterminer la force que la barre exerce sur l'axe en fonction de l'angle θ.



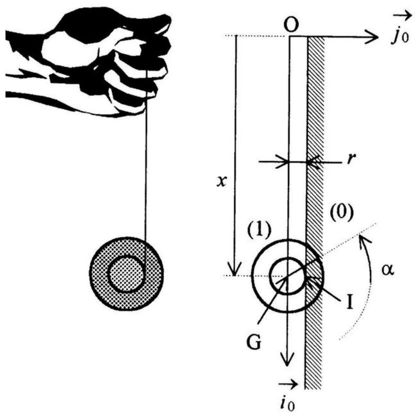
Exercice 3. Machine d'Atwood

Une poulie circulaire, de rayon *b*, de centre C, de masse *m*, de moment d'inertie *J* par rapport à son axe, peut tourner librement (sans frottement) autour de son axe horizontal fixe. Cette poulie supporte grâce à un fil inextensible de masse négligeable, d'un côté un masse *M* et de l'autre une masse *M'* supérieure à *M*. On suppose que le fil ne glisse pas sur la poulie.

Calculer, par deux méthodes différente, l'accélération de la masse *M'* en fonction des données de l'énoncé :

a) En utilisant le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique.

b) En utilisant l'énergie ou la puissance mécanique.



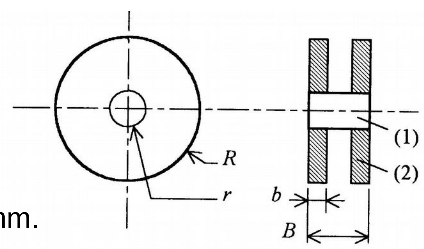
Exercice 3 : Mouvement descendant d'un Yo-yo

Considérons le mouvement plan vertical d'un yo-yo composé d'un disque de rayon *r* sur lequel s'enroule un fil de longueur *l*. Le disque est homogène de masse *m* et de moment d'inertie *J* par rapport à son axe de symétrie. La masse et la section du fil sont négligeable. La portion de fil qui n'est pas enroulé sur le yo-yo reste verticale pendant le mouvement. Initialement, le yo-yo est lâché avec une vitesse nulle.

a) Soit α la position angulaire du yo-yo par rapport à l'horizontale et *x* la position verticale de son centre de gravité (voir schéma). Quelle relation géométrique existe-t-il entre α et *x* ?

b) Écrire le principe fondamental de la dynamique, en déduire la loi de mouvement descendant du yo-yo. Quelle est la vitesse verticale maximale du yo-yo ?

c) Retrouver à partir de l'énergie cinétique l'équation différentielle du mouvement.



d) En supposant que le yo-yo est constitué de plusieurs disques homogènes d'un même matériaux (voir schéma), déterminer $k = J / mr^2$.
A.N. Calculer *k* pour *r* = 5 mm, *R* = 20 mm, *b* = 4 mm et *B* = 15 mm.

Réponse : k = 7,6

Exercice 4 : Échelle double

On modélise une échelle double par deux barres AB et AC articulées en A, sans frottement en A. Les deux barres sont homogènes, de même masse m et de même longueur h. Initialement, l'échelle est posée fermée (B et C presque confondus), sans vitesse initiale, A se trouvant sur l'axe (Oz) à la distance h du sol, B et C étant sur le sol. On suppose que l'échelle se met à glisser parfaitement (pas de frottement sur le sol en B ni C). Soit D le milieu de [A,C], on repère la position de l'échelle par l'angle θ entre le sol et le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

a) Montrer que le mouvement de D est sur un cercle de centre 0 et de rayon $h/2$.

b) Déterminer l'énergie cinétique de l'échelle.

c) En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

d) Calculer en fonction de h, la vitesse de l'extrémité A quand elle arrive en contact avec le sol.

Donnée : moment d'inertie d'une barre homogène, de masse m, de longueur l, par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre est $J = ml^2/12$.

Exercice 5 : Glissement d'une barre sur deux supports

Une barre rectiligne homogène de masse m repose, horizontalement, sur deux supports en deux points J et I, séparés d'une distance $2b$. Initialement, la barre est en translation de J vers I à la vitesse v_O et son centre de gravité est au milieu de [I,J]. Il n'y a pas de frottement en J et il y a un frottement en I caractérisé par un coefficient de frottement f. La barre est suffisamment longue pour qu'il y ait toujours contact en I et J pendant le mouvement étudié. L'épaisseur (verticale) de la barre est négligée.

a) Déterminer, par une méthode énergétique, la valeur de la vitesse initiale v_O pour que le centre de gravité de la barre arrive en I avec une vitesse nulle.

b) A quel instant cela se produit-il ?

Exercice 6. Oscillation d'une barre dans un bol

En utilisant un théorème d'énergie, calculer la période des petites oscillations de la barre AB (homogène de masse m, de longueur $2l$ = AB et de milieu C), dans un bol fixe en forme de demi-sphère (centre O, rayon R tel que $l < R$). Voir figure.

Les contacts entre la barre et le bol sont supposés sans frottement. On supposera que le mouvement de la barre AB est dans le plan de la figure.

Indications :

– *Remarque : les droites (AB) et (OC) restent perpendiculaires.*

– *N'oubliez pas la relation géométrique entre OC, l et R.*

– *Pour calculer la période des oscillations, on cherchera l'équation différentielle dont l'angle* θ *est solution. Puis on résout cette équation dans la limite des petits angles* θ.

– *Le moment d'inertie de la barre par rapport à un axe perpendiculaire passant par son milieu est* $J = m(2l)^2/12$.