

Travaux dirigés série n°II : Solide en mouvement, cinématique

Exercice 1 : Pièce roulant sur un plan

Une pièce verticale, de centre C et de rayon b , roule sans glisser sur une table horizontale à la vitesse angulaire ω . Dans le référentiel de la table :

- Déterminer géométriquement la position de l'axe instantané de rotation.
- Déterminer le vecteur instantané de rotation de ce solide.
- Soit C le centre de la pièce. En supposant que la pièce roule sans glisser, déterminer la relation entre la vitesse v_C de C et la vitesse angulaire ω .
- Soit M un point de la pièce tel que $CM = b$. En supposant que la vitesse angulaire est constante tracer la norme de la vitesse de M en fonction du temps.

Exercice 2 : Échelle

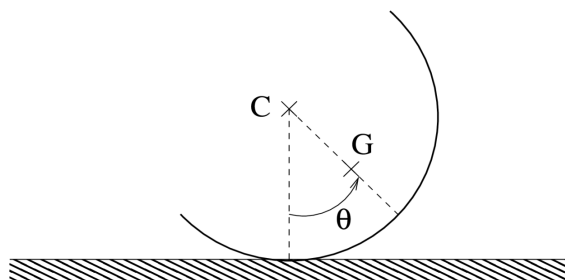
Une échelle, assimilée à une barre de longueur $2l$, glisse en restant en contact à la fois avec le sol horizontal et un mur vertical. Soit C le centre de la barre et O le point d'intersection du sol et du mur dans le plan de la barre.

- Montrer que $OC = l$.
- Déterminer géométriquement la position de l'axe instantané de rotation.
- Déterminer le vecteur instantané de rotation de l'échelle dans le référentiel du sol en fonction de l'angle α de l'échelle avec l'horizontale [et sa dérivée temporelle].

Exercice 3 : Gouttière demi-cylindrique

Une gouttière homogène, en forme de demi-cylindre creux, de rayon b , de masse m , roule sans glisser sur un plan horizontal. La ligne de contact entre la gouttière et le plan est forcément une droite parallèle à l'axe de la gouttière. Soit C le centre du cylindre complet correspondant au demi-cylindre de la gouttière. Soit G le centre de gravité de la gouttière et θ l'angle entre la verticale et \vec{CG} .

- Montrer la distance CG vaut $2b/\pi$.
- Exprimer la vitesse de C dans le référentiel du sol [en fonction de θ et sa dérivée temporelle].



Exercice 4 : Cinématique d'un cerceau sur un cylindre

Un cerceau vertical, de centre C, de rayon b et de masse m , roule sans glisser sur un cylindre fixe d'axe horizontal et de rayon R , ($R > b$). En fonction d'une variable de position du cerceau que l'on choisira et de ses dérivées temporelles, exprimer dans un référentiel lié au sol :

- les vecteurs vitesse et accélération du point C,
- le vecteur rotation instantané du cerceau,
- le moment cinétique du cerceau en O point d'intersection entre le plan du cerceau et l'axe du cylindre,
- l'énergie cinétique du cerceau.

Exercice 5 :

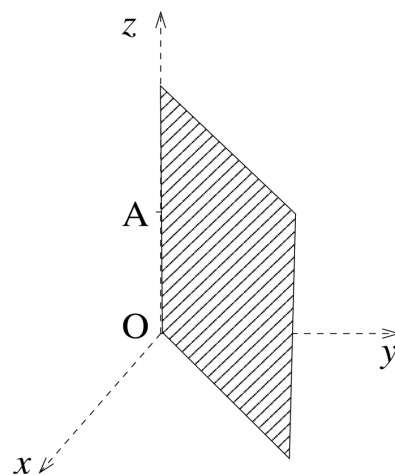
On appelle **rayon de giration** d'un solide par rapport à un axe, la distance par rapport à l'axe, du point où devrait être concentrée la masse du solide, pour conserver le même moment d'inertie par rapport à cet axe. Exprimer le rayon de giration d'un disque et d'un cerceau de rayon R par rapport à leur axe de symétrie de révolution.

Exercice 6 :

- Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 sont reliées par une tige rigide de longueur L et de masse négligeable. Exprimer le moment d'inertie J de ce système par rapport à un axe perpendiculaire à la tige, croisant la tige et se trouvant à une distance x de m_1 . Pour quelle valeur de x , J est-il minimal ? Donner la valeur minimale de J . Tracer $J(x)$.
- Reprendre les mêmes questions dans le cas d'une tige homogène de masse m et de longueur L sans masse à ses extrémités.
- Chaque pôle d'un rotor d'hélicoptère est assimilée à une tige unidimensionnelle et homogène de longueur 5.20 m et de masse 240 kg. Le rotor fait 350 révolutions par minute. Calculer l'énergie cinétique de rotation du rotor.

Exercice 7 : Moment cinétique et axe de symétrie.

Une plaque homogène carrée de côté a , d'épaisseur négligeable, de masse m , tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oz) coïncidant avec l'un de ses côtés. Le point O est l'un des sommets de la plaque. Le point A est sur l'axe (Oz) au milieu d'un des côtés de la plaque.



- Déterminer le moment d'inertie J de la plaque par rapport à l'axe (Oz). En déduire le moment cinétique de la plaque par rapport à l'axe (Oz).
- Justifier par un argument de symétrie que le moment cinétique de la plaque par rapport au point A est parallèle à (Oz). En déduire l'expression de ce moment cinétique.
- Déterminer le moment cinétique de la plaque par rapport au point O. Le représenter sur le schéma.

Exercice 8 : Exprimer le moment d'inertie :

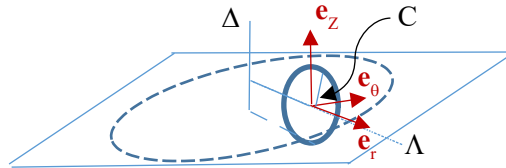
- D'un cylindre homogène de rayon R , de longueur L et de masse m , par rapport à son axe de symétrie de révolution.
- D'une boule homogène de rayon R et de masse m par rapport à un diamètre.
- D'une plaque rectangulaire homogène, de masse m , d'épaisseur e , de longueur L et de largeur ℓ et par rapport à un axe perpendiculaire à son plan en son centre.

Exercice 9 :

Une roue de centre C , de rayon a et axe Λ , roule sans glisser sur un plateau horizontal π . L'axe de la roue est parallèle au plateau, et tourne autour d'un axe Δ vertical avec une vitesse angulaire de module ω .

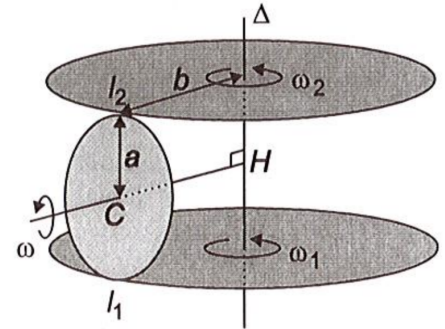
On appelle O l'intersection entre Δ et π et H l'intersection entre Δ et l'axe Λ .

- a) Exprimer le vecteur de rotation Ω de la roue dans le référentiel \mathcal{R} lié au plan.
- b) En définissant la base polaire en C ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$), calculer le vecteur vitesse dans \mathcal{R} d'un point M sur le bord de la roue repéré par l'angle $\varphi = (\mathbf{e}_\theta, \mathbf{CM})$.



Exercice 10 : Transmission différentielle

On considère deux disques de même axe Δ et de même rayon b . Les deux disques peuvent tourner autour de Δ . La transmission est assurée par une roue, de centre C et de rayon a , pouvant tourner autour de son axe (CH) perpendiculaire à Δ . On note ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires des disques et ω la vitesse angulaire de la rotation de la roue autour de (CH) . La distance CH vaut b .



Sachant que la roue roule sans glisser sur les disques, calculer ω et la vitesse v de son centre C .

Exercice complémentaire :

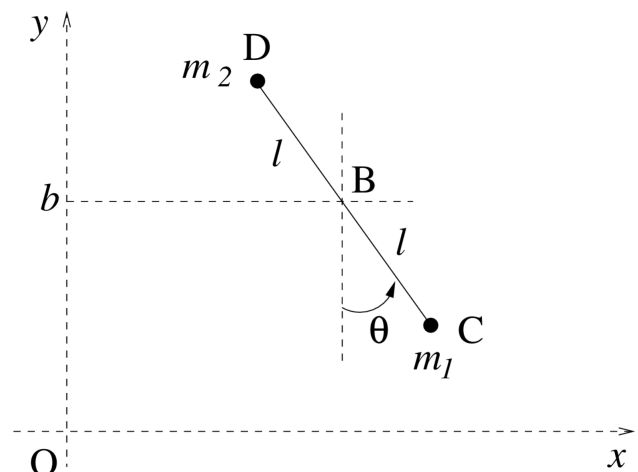
Exercice 11 : (Contrôle, octobre 2008, corrigé sur page web)

Une voiture se déplace rectilignement dans la direction (Ox) avec une accélération $\gamma = \alpha t$. α est une constante positive, t est le temps. Initialement (à $t = 0$), la voiture à la vitesse v_0 et un point B , fixe dans la voiture, est en $(0, b, 0)$ dans le référentiel $(\mathcal{R}(O, x, y, z))$ lié au sol.

Une tige CD , de longueur $2l$ et de masse négligeable, est fixée en B , milieu de CD , sur un axe fixe de la voiture. La tige CD tourne dans le plan (O, x, y) autour de son centre B à la vitesse angulaire ω_0 constante. Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 ($m_1 = m_2 = m$) sont fixées à la tige CD en C et D , respectivement.

- 1) Déterminer, dans le référentiel du sol $(\mathcal{R}(O, x, y, z))$ et dans le référentiel barycentrique des deux masses, les quantités suivantes :

- a) Vitesse et accélération du point C .



- b) Moment cinétique au point B et au point O du solide composé de la tige CD et des deux masses.
- 2) Le système $\{m_1, m_2, \text{tige CD}\}$ est remplacé par une barre de masse $M = 2m$ homogène de même longueur. Déterminer le moment cinétique de la barre par rapport à O dans le référentiel $(R(O, x, y, z))$.