Travaux dirigés série n°II : Solide en mouvement, cinématique

Exercice 1 : Pièce roulant sur un plan

Une pièce verticale, de centre C et de rayon *b*, roule sans glisser sur une table horizontale à la vitesse angulaire ω. Dans le référentiel de la table :

a) Déterminer géométriquement la position de l'axe instantané de rotation.

b) Déterminer le vecteur instantané de rotation de ce solide.

c) Soit C le centre de la pièce. En supposant que la pièce roule sans glisser, déterminer la relation entre la vitesse v_C de C et la vitesse angulaire ω.

d) Soit M un point de la pièce tel que CM = *b*. En supposant que la vitesse angulaire est constante tracer la norme de la vitesse de M en fonction du temps.

Exercice 2 : Échelle

Une échelle, assimilée à une barre de longueur 2*l*, glisse en restant en contact à la fois avec le sol horizontal et un mur vertical. Soit C le centre de la barre et O le point d'intersection du sol et du mur dans le plan de la barre.

– Montrer que OC = *l*.

– Déterminer géométriquement la position de l'axe instantané de rotation.

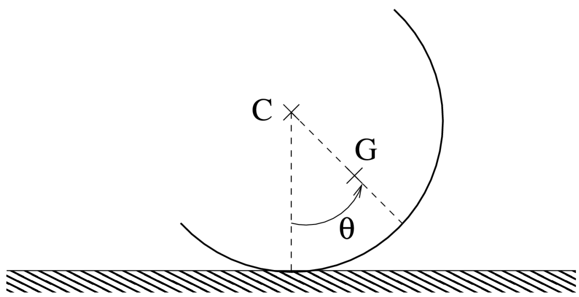
– Déterminer le vecteur instantané de rotation de l'échelle dans le référentiel du sol en fonction de l'angle α de l'échelle avec l'horizontale *[et sa dérivée temporelle].*

Exercice 3 : Gouttière demi-cylindrique

Une gouttière homogène, en forme de demi-cylindre creux, de rayon *b*, de masse *m*, roule sans glisser sur un plan horizontal. La ligne de contact entre la gouttière et le plan est forcément une droite parallèle à l'axe de la gouttière. Soit C le centre du cylindre complet correspondant au demi-cylindre de la gouttière. Soit G le centre de gravité de la gouttière et θ l'angle entre la verticale et $\overrightarrow{CG}$.

a) Montrer la distance CG vaut $2b/\pi$.

b) Exprimer la vitesse de C dans le référentiel du sol *[en fonction de θ et sa dérivée temporelle].*



Exercice 4 : Cinématique d'un cerceau sur un cylindre

Un cerceau vertical, de centre C, de rayon *b* et de masse *m*, roule sans glisser sur un cylindre fixe d'axe horizontal et de rayon *R*, (*R* > *b*). En fonction d'une variable de position du cerceau que l'on choisira et de ses dérivées temporelles, exprimer dans un référentiel lié au sol :

a) les vecteurs vitesse et accélération du point C,

b) le vecteur rotation instantané du cerceau,

c) le moment cinétique du cerceau en O point d'intersection entre le plan du cerceau et l'axe du cylindre,

d) l'énergie cinétique du cerceau.

Exercice 5 :

On appelle **rayon de giration** d'un solide par rapport à un axe, la distance par rapport à l'axe, du point où devrait être concentrée la masse du solide, pour conserver le même moment d'inertie par rapport à cet axe. Exprimer le rayon de giration d'un disque et d'un cerceau de rayon R par rapport à leur axe de symétrie de révolution.

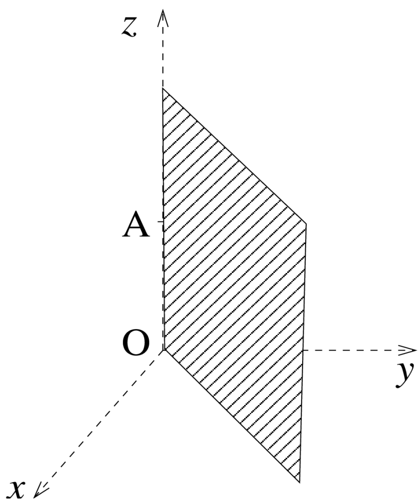
Exercice 6 :

a) Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 sont reliées par une tige rigide de longueur L et de masse négligeable. Exprimer le moment d'inertie J de ce système par rapport à un axe perpendiculaire à la tige, croisant la tige et se trouvant à une distance x de m_1. Pour quelle valeur de x, J est il minimal ? Donner la valeur minimale de J. Tracer $J(x)$.

b) Reprendre les mêmes questions dans le cas d'une tige homogène de masse m et de longueur L sans masse à ses extrémités.

c) Chaque pâle d'un rotor d'hélicoptère est assimilée à une tige unidimensionnelle et homogène de longueur 5.20 m et de masse 240 kg. Le rotor fait 350 révolutions par minute. Calculer l'énergie cinétique de rotation du rotor.

Exercice 7 : Moment cinétique et axe de symétrie.



Une plaque homogène carré de coté a, d'épaisseur négligeable, de masse m, tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oz) coïncidant avec l'un de ses cotés. Le point O est l'un des sommets de la plaque. Le point A est sur l'axe (Oz) au milieu d'un des côtés de la plaque.

a) Déterminer le moment d'inertie J de la plaque par rapport à l'axe (Oz). En déduire le moment cinétique de la plaque par rapport à l'axe (Oz).

b) Justifier par un argument de symétrie que le moment cinétique de la plaque par rapport au point A est parallèle à (Oz). En déduire l'expression de ce moment cinétique.

c) Détermier le moment cinétique de la plaque par rapport au point O. Le représenter sur le schéma.

Exercice 8 : Exprimer le moment d'inertie :

a) D'un cylindre homogène de rayon R, de longueur L et de masse m, par rapport à son axe de symétrie de révolution.

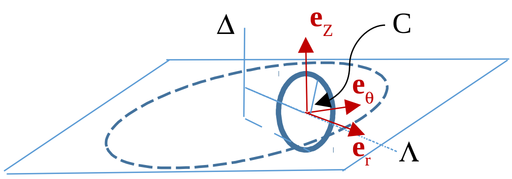
b) D'une boule homogène de rayon R et de masse m par rapport à un diamètre.

c) D'une plaque rectangulaire homogène, de masse m, d'épaisseur e, de longueur L et de largeur ℓ et par rapport à un axe perpendiculaire à son plan en son centre.

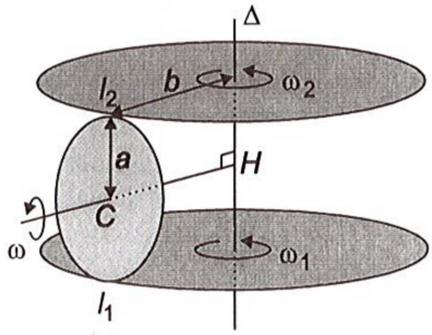
Exercice 9 :

Une roue de centre C, de rayon a et axe Λ, roule sans glisser sur un plateau horizontal π. L'axe de la roue est parallèle au plateau, et tourne autour d'un axe Δ vertical avec une vitesse angulaire de module ω.
On appelle O l'intersection entre Δ et π et H l'intersection entre Δ et l'axe Λ.

a) Exprimer le vecteur de rotation Ω de la roue dans le referential R lié au plan.
b) En definisant la base polaire en C ($\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_z$), calculer le vecteur vitesse dans R d'un point M sur le bord de la rue repéré par l'angle $\varphi=(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{CM})$.



Exercice 10 : Transmission différentielle



On considère deux disques de même axe Δ et de même rayon b. Les deux disques peuvent tourner autour de Δ. La transmission est assurée par une roue, de centre C et de rayon a, pouvant tourner autour de son axe (CH) perpendiculaire à Δ. On note ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires des disques et ω la vitesse angulaire de la rotation de la roue autour de (CH). La distance CH vaut b.

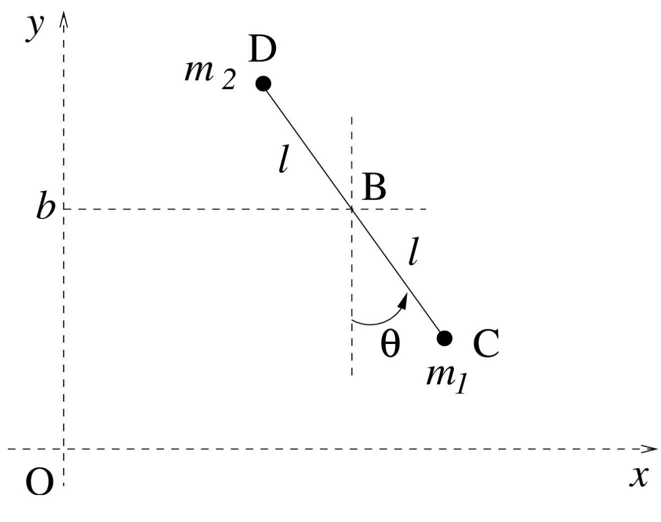
Sachant que la roue roule sans glisser sur les disques, calculer ω et la vitesse v de son centre C.

<u>Exercice complémentaire :</u>

Exercice 11 : *(Contrôle, octobre 2008, corrigé sur page web)*

Une voiture se déplace rectilignement dans la direction (Ox) avec une accélération $\gamma=\alpha t$. α est une constante positive, t est le temps. Initialement *(à t = 0)*, la voiture à la vitesse v_0 et un point B, fixe dans la voiture, est en ($0,b,0$) dans le référentiel (R(O,x,y,z)) lié au sol.

Une tige CD, de longueur 2l et de masse négligeable, est fixée en B, milieu de CD, sur un axe fixe de la voiture. La tige CD tourne dans le plan (O,x,y) autour du son centre B à la vitesse angulaire ω_0 constante. Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 ($m_1 = m_2 = m$) sont fixées à la tige CD en C et D, respectivement.



1) Déterminer, dans le référentiel du sol (R(O,x,y,z)) et dans le référentiel barycentrique des deux masses, les quantités suivantes :

   a) Vitesse et accélération du point C.

b) Moment cinétique au point B et au point O du solide composé de la tige CD et des deux masses.

2) Le système {m_1, m_2, tige CD} est remplacé par une barre de masse $M = 2m$ homogène de même longueur. Déterminer le moment cinétique de la barre par rapport à O dans le référentiel (R (O,x,y,z)).

Exercice 12 : Changement de référentiel *(corrigé : https://trambly.u-cergy.fr/L2MecaSol/index.html)*

Un référentiel (R'(0',x',y',z')) est en mouvement par rapport au référentiel (R(0,x,y,z)). Soient :

– $\vec{v}(O')$ et $\vec{a}(O')$ la vitesse et l'accélération de 0' dans (R),

– $\vec{\Omega}$ vecteur rotation instantané de (R') rapport à (R).

On peut montrer que : quelque soit $\vec{u'}$, vecteur unitaire fixe[1] dans (R'), sa dérivée temporelle dans (R) est : $\left(\frac{d}{dt}\vec{u'}\right)_R = \vec{\Omega}\wedge\vec{u'}$.

a) Montrer que quelque soit le vecteur $\vec{A}(t)$, la dérivée temporelle de $\vec{A}$ dans (R) et la dérivée de $\vec{A}(t)$ dans (R') sont reliées par la relations : $\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A}$.

b) Montrer que la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ d'un point M dans (R) s'écrivent en fonction de la vitesse $\vec{v'}$ et l'accélération $\vec{a'}$ de M dans (R') :

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}(O') + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}(O') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\right)\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v'}$$

1 C'est à dire $\vec{u'}$ indépendant du temps dans le référentiel (R').