Examen L2 - Mecanique du Solide Session 2 - 10/6/09

10

Question de cours: Soit (R) un référentiel

Soit $\vec{L}_A$ le moment cinétique d'un système par rapport à A dans (R).

Soit (R*) le référentiel barycentrique du système associé à (R)

Soit $\vec{L}^*$ le moment cinétique barycentrique du système

Th de König: $\vec{L}_A = \vec{L}^* + \vec{AG} \wedge m\vec{v}_G$

avec G le centre de gravité du système

$\vec{v}_G$ la vitesse dans (R) du point G

m la masse totale du système.

Démonstration: $\underset{\text{dans }(R)}{\vec{L}_A} = \iiint_{P \in \text{système}} \vec{AP} \wedge \underset{\text{dans }(R)}{\vec{v}(P)}\, dm$

$\vec{L}_A = \iiint_{P\in\text{système}} (\vec{AG} + \vec{GP}) \wedge \vec{v}(P)\, dm = \vec{AG} \wedge \underbrace{\iiint_{P\in\text{système}} \vec{v}(P)\, dm}_{= m\vec{v}(G)} + \iiint \vec{GP} \wedge \vec{v}(P)\, dm$

$= \vec{AG} \wedge m\vec{v}(G) + \iiint \vec{GP} \wedge (\vec{v}(G) + \vec{v}^*(P))\, dm$

avec $\underset{\text{dans }(R)}{\vec{v}(P)} = \vec{v}(G) + \underset{\text{dans }(R^*)}{\vec{v}^*(P)}$ car (R^*) est en translation par rapport à (R)

donc $\vec{L}_A = \vec{AG} \wedge m\vec{v}(G) + \underbrace{\left(\iiint_{P\in\text{système}} \vec{GP}\, dm\right)}_{\text{par définition de } G \;\to\; = 0} \wedge \vec{v}(G) + \underbrace{\iiint_{P\in\text{système}} \vec{GP} \wedge \vec{v}^*(P)\, dm}_{= \vec{L}^*}$

car dans (R*) $\vec{L}^*$ ne dépendant pas du point par rapport auquel $\vec{L}^*$ est calculé $\vec{L}^* = \vec{L}^*_G$

donc $\vec{L}_A = \vec{AG} \wedge m\, \vec{v}(G) + \vec{L}^*$

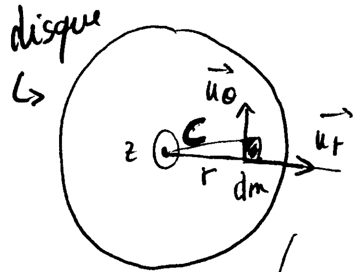
Mouvement d'un disque tiré le long d'un plan incliné

a) Moment d'inertie J d'un disque par rapport à son axe de symétrie

J ne dépend pas de l'épaisseur du disque e

on peut prendre $e \simeq 0$ ou $e \neq 0$

avec $e \simeq 0$ soit σ la masse surfacique $\sigma = c^{te} = \dfrac{M}{\pi a^2}$
car homogène



$dm = \sigma\, dS$
$= \sigma\, r\, d\theta\, dr$

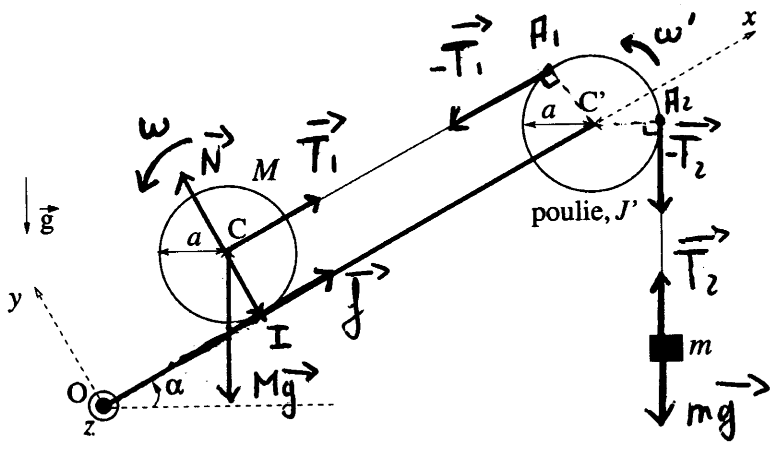
par définition $J = \iint_{P \in \text{disque}} dm(P)\; CP^2 = \sigma \iint dS(P)\; CP^2$

avec $CP = r$ en polaire et $dS(P) = r\, d\theta\, dr$

$$J = \sigma \iint_{\text{disque}} r^2\, r\, d\theta\, dr = \frac{M}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} r^3\, dr$$

$$= \frac{M}{\pi a^2}\, 2\pi \frac{1}{4} a^4 = \underline{\underline{\frac{M}{2} a^2}}$$

b)



$\vec{v}(C) = v_C\, \vec{u_x}$

Rmq : Si $v_C > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \omega' < 0 \text{ (par rapport au sens direct)} \\ \omega < 0 \end{cases}$

le fil ne glisse pas sur la poulie donc $|\omega'|\, a = v(A_1) = v(C)$

donc $\underline{\omega' = -v(C)/a}$ (1)

le disque ne glisse pas sur le plan incliné donc $a|\omega| = v(C) \Rightarrow \underline{\underline{\omega = \omega'}}$ (2)

c) Fil sans masse donc force du fil sur disque $\vec{T_1} = -\overrightarrow{\text{force du fil sur poulie}}$

Forces sur la poulie : $\begin{cases} -\vec{T_1} & \text{force du fil (à gauche) en } A_1 \\ -\vec{T_2} & \text{force du fil (vers le bas) en } A_2 \end{cases}$ L2

avec $\vec{T_1} = T_1 \vec{u_x}$

autre force sur la poulie : $\begin{cases} \vec{R'} & \text{réaction de l'axe de la poulie en } C' \\ \vec{P'} & \text{poids de la poulie en } C' \end{cases}$:

th du moment cinétique pour la poulie en C' :

$$\frac{d\vec{L}_{C'}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{C'}(\vec{force}) = \vec{C'A_1} \wedge (-\vec{T_1}) + \vec{C'A_2} \wedge (-\vec{T_2}) + \underbrace{\vec{C'C'}}_{=\vec{0}} \wedge \vec{R'} + \underbrace{\vec{C'C'}}_{=\vec{0}} \wedge \vec{P'}$$

$$= \|\vec{T_1}\| a \vec{u_z} - \|\vec{T_2}\| a \vec{u_z}$$

or $\vec{L}_{C'}(\text{poulie}) = J_{\text{poulie}}\, \omega' \vec{u_z} = -J' \dfrac{v(c)}{a} \vec{u_z}$

donc $\underline{\dfrac{d\,v(c)}{dt} J' = \left(-\|\vec{T_1}\| + \|\vec{T_2}\|\right) a^2}$ (3)

d) (i) accélération du C : $a(c) = \dfrac{d\vec{v}(c)}{dt} = a(c)\,\vec{u_x} = \ddot{x}\,\vec{u_x}$

avec x position de C sur l'axe (Ox).

dans (R) réf. lié au sol, principe fondamental sur le disque :

$$M\ddot{x}\,\vec{u_x} = \vec{T_1} + \vec{N} + \vec{f} + M\vec{g}$$

$\vec{T_1} = T_1 \vec{f}$

(4) projection sur (Ox) : $M\ddot{x} = T_1 + f - Mg \sin\alpha$ avec $\vec{f} = f\,\vec{u_x}$

(5) " (Oy) : $0 = N - Mg\cos\alpha$ avec $\vec{N} = N\,\vec{u_y}$

th du moment cinétique pour le disque

$$\frac{d\vec{L}_G(\text{disque})}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\text{force sur disque})$$

avec $\vec{L}_G = J(\text{disque})\ \dot{\omega}\ \vec{u_z} = \frac{M}{2}{}^2\dot{\omega}\ \vec{u_z} = \frac{M}{2}a^2\left(\frac{-\dot{x}}{a}\right)$ $\angle 3$

car $\vec{v}(C) = \dot{x}\ \vec{u_x}$ et $\omega' = -v(C)/a$

donc $-\frac{M}{2}a\ \ddot{x}\vec{u_z} = \underbrace{\vec{CC}\wedge M\vec{g}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{IC}\wedge\vec{N}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{CC}\wedge\vec{T_1}}_{=\vec{0}} + \vec{CI}\wedge\vec{f}$

$= af\ \vec{u_z}$ avec $\vec{f} = f\ \vec{u_x}$

donc $f = -\frac{M}{2}\ddot{x}$ (6)

d'après équation (4) on a : $M\ddot{x} = T_1 - \frac{M}{2}\ddot{x} - Mg\sin\alpha$ (7)

avec $T_1 = \|\vec{T_1}\|$ donnée par équation (3)

mais il faut connaître T_2, pour cela : principe fondamental sur le système m :

$m\ \vec{a}(\text{masse } m) = \vec{T_2} + m\vec{g}$

en projection sur la verticale (vers le haut) $T_2 = \|\vec{T_2}\|$

$m\ a(\text{masse } m) = T_2 - mg$

avec $a(\text{masse } m) = -\ddot{x}$ ("$-$" car $\vec{a}$ vers le bas et)

fil inextensible

donc $T_2 = -m\ddot{x} + mg$

d'après (3) $T_1 = T_2 \Rightarrow \ddot{x}\frac{J'}{a^2} = -m\ddot{x} + mg - \frac{J'}{a^2}\ddot{x}$

en remplaçant dans (7) : $\ddot{x}\left(M + \frac{M}{2} + m + \frac{J'}{a^2}\right) = mg - Mg\sin\alpha$

donc l'accélération de C est $\boxed{\ddot{x} = \frac{(m - M\sin\alpha)g}{\frac{3M}{2} + m + \frac{J'}{a^2}}}$

(ii) par l'énergie

système = { poulie, fil, disque, masse m }

E mécanique de ce système $= E_m = E_c(\text{disque}) + E_{pot}(\text{disque})$
$+ E_c(\text{poulie}) + E_c(\text{masse } m)$
$+ E_{pot}(\text{masse } m) + c^{te}$

$$E_c(\text{disque}) = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{v(C)^2}_{\dot{x}^2}$$ (Konig pour énergie cinétique)

$E_{pot}(\text{disque}) = M g h_C + c^{te}$ $\quad h_C$: hauteur du point C

$$E_c(\text{poulie}) = \frac{1}{2} J' \omega'^2$$

$E_{pot}(\text{poulie}) = c^{te}$ car $h_{C'} = c^{t}$

$$E_c(\text{masse } m) = \frac{1}{2} m \, v(\text{masse } m)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$E_{pot}(\text{masse } m) = m g h_m + c^{t}$ $\quad h_m$: hauteur de la masse m.

travaux des forces (internes et externes) autres que les poids.
le fil est inextensible donc les forces de tension du fil ne travaillent pas
$\vec{f}$ ne travaille pas car le point de contact I a une vitesse nulle à chaque instant.

Donc $E_m = c^{te}$, en utilisant $\omega^2 = \left(\frac{v(C)}{a}\right)^2 = \omega'^2 = \frac{\dot{x}^2}{a^2}$

et $\frac{dE_m}{dt} = 0$ on a : $\left(\frac{J}{a^2} + M + \frac{J'}{a} + m\right)\dot{x}\ddot{x} = -Mg\dot{h}_C - mg\dot{h}_m$

or $h_C = x \sin\alpha + c^{te} \Rightarrow \dot{h}_C = \dot{x} \sin\alpha$

et $h_m = -x + c^{te} \Rightarrow \dot{h}_m = -\dot{x}$ $\quad$ ⚠ signe

donc $$\boxed{\ddot{x} = \frac{(m - M\sin\alpha) g}{\frac{J}{a^2} + \frac{J'}{a^2} + M + m}}$$ avec $J = \frac{M}{2} a^2$

e) le disque mont si $\ddot{x} > 0$

c.à.d. si $\underline{\underline{m > M \sin\alpha}}$

f) $J' = 0$ et $M = m$

donc $\ddot{x} = \dfrac{m(1-\sin\alpha)}{\frac{m}{2} + 2m} g = \dfrac{2}{5}(1-\sin\alpha)\, g > 0$

le disque monte

le disque ne glisse pas sur le plan incliné si $\|\vec{f}\| \leq \mu \|\vec{N}\|$

frottement statique

or, d'après (5): $N = Mg\cos\alpha > 0$

d'après (6): $\|\vec{f}\| = \dfrac{M}{2}\ddot{x} = \dfrac{M}{5}(1-\sin\alpha)\, g$

la condition de non glissement est donc :

$$\boxed{\frac{1}{5}(1-\sin\alpha) \leq \mu \cos\alpha}$$

On peut trouver la condition sur α en élevant au carré

$$\frac{1}{25}(1-\sin\alpha)^2 \leq \mu^2\cos^2\alpha = \mu^2(1-\sin^2\alpha)$$

$$\frac{1}{25} + \frac{\sin^2\alpha}{25} + \frac{2}{25}\sin\alpha \leq \mu^2 - \mu^2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha\left(\frac{1}{25} + \mu^2\right) + \frac{2}{25}\sin\alpha + \frac{1}{25} - \mu^2 \leq 0$$

avec $X = \sin\alpha$: $\quad X^2(1+25\mu^2) + 2X + 1 - 25\mu^2 \leq 0$

2 racines: $X_1 = 1$ et $X_2 = \dfrac{1-25\mu^2}{1+25\mu^2}$

il faut donc $\quad X_2 \leq \sin\alpha = X \leq X_1$