Examen de mécanique du solide mercredi 5 janvier 2022 (2 heures)

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.
Toutes les réponses doivent être justifiées. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. Question de cours *(~ 2 points).*

a) Définir ce qu'est un couple de force.
b) Montrer que le moment en O d'un couple de force est indépendant de O.

Exercice 2. Question proche du cours. *Changement de référentiel. (~ 2 points)*

Soit deux référentiels R(O,x,y,z) et R'(O,x',y',z') de même origine O, en rotation l'un par l'autre. Soit $\vec{\Omega}(t)$ le vecteur de rotation instantané de R' dans R.

a) Déterminer (avec démonstration) la relation entre les vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ dans R et R' d'un point *M* quelconque.
b) Déterminer (avec démonstration) la relation entre les accélérations $\vec{a}$ et $\vec{a}\,'$ dans R et R' d'un point *M* quelconque.

Rappel : Vous pouvez utiliser sans la démontrer la formule des changements de référentiel :

$$\forall \vec{A} \ : \ \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$$

Exercice 3. balançoire asymétrique *(~ 10 points)*

Soit une balançoire rotative simple dont les 2 côtés n'ont pas la même longueur (voir figure 1) :

- La barre rigide AB, est de longueur AB = 4a (a est un constante positive) et de masse homogène M.
- Celle barre peut tourner autour d'un axe horizontal Δ (Δ est perpendiculaire à la figure) : AO = a et OB = 3a avec O le point d'intersection entre la barre et Δ. La barre AB reste donc dans le plan de la figure 1. On suppose que la barre tourne librement autour de Δ , c'est à dire que les forces entre l'axe Δ et la barre ne travaillent pas.

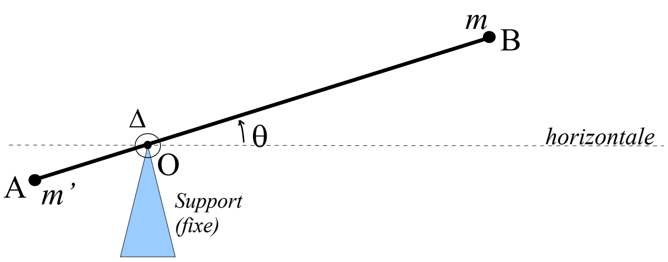

Figure 1

- Soit θ l'angle de la barre par rapport à l'horizontale.
- Une masse ponctuelle m' est placée en A et une masse ponctuelle m est placée en B.

a) Question préliminaire : Calculer le moment d'inertie J de la barre AB par rapport à l'axe Δ, en fonction de M et a.

Dans la suite de l'exercice on utilisera J comme une donnée.

b) Statique :

b.1) Faire un bilan des forces sur le système {barre, masse m, masse m'}.

b.2) Déterminer la condition sur m' (en fonction de M, m et a) pour que la barre AB reste immobile.

b.3) Cet équilibre statique est-il atteint pour une valeur particulière de l'angle θ ? Si oui, laquelle ?

c) <u>Dynamique</u> <u>(avec les lois de Newton et/ou le théorème du moment cinétique)</u> :

On considère maintenant que $m' = m$. A l'instant initial on a θ = 30 ° et la barre est immobile.

c.1) Calculer le moment cinétique du système {barre, masse m, masse m'} par rapport à l'axe Δ, orienté par un vecteur $\vec{u}$ (que vous indiquerez sur un schéma), en fonction de m, M, J, a, de la fonction $\theta(t)$ et/ou de ses dérivées temporelles ($\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$).

c.2) D'après le théorème du moment cinétique, déterminer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$ en fonction de m, M, J, a, g et $\theta(t)$.

c.3) En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ en fonction de m, M, J, a, g et $\theta(t)$.

c.4) Application : calculer (en fonction de M, m, a, J et g) la vitesse du point B lorsque la barre atteint l'horizontale ($\theta = 0$).

d) <u>Dynamique</u> <u>(avec l'énergie)</u> :

Dans les mêmes conditions que la question c ($m' = m$, instant initial θ = 30° et barre immobile).

d.1) Calculer l'énergie cinétique du système {barre, masse m, masse m'}, en fonction de m, M, J, a et de la fonction θ(t) et/ou de ses dérivées ($\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$).

d.2) Par un théorème d'énergie, retrouver le résultat de la question c.2.

Exercice 4. Mouvement horizontal d'un Yoyo sous l'effet d'une force *(~ 6 points)*

Un yoyo de rayon interne b, de rayon externe R, de masse m, et de moment d'inertie J par rapport à son axe de symétrie, est posé sur le sol horizontal. Le centre de masse du yoyo est son centre C. Initialement, le yoyo ne bouge pas et l'abscisse de C est $x_C = 0$ (voir figure). On supposera que le mouvement du yoyo reste dans le plan (O,x,y) et que le yoyo ne glisse jamais. Le coefficient de frottement statique entre le yoyo et le sol est μ .

Le fil du yoyo est supposé inextensible et sans masse ; une grande partie du fil est s'enroulé sur la bobine de rayon b du yoyo. On supposera que le fil enroulé sur le yoyo est suffisamment long pour qu'il y ait toujours du fil enroulé sur le yoyo.

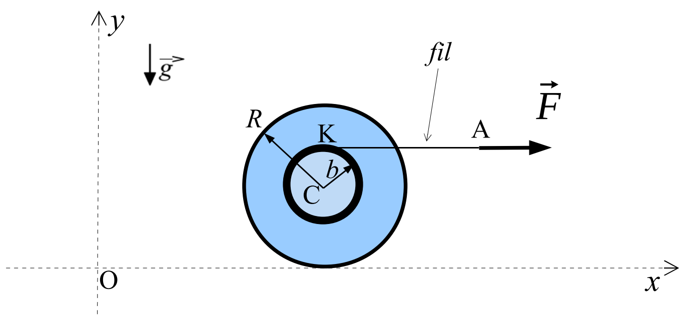

Figure 2

Aux temps $t \geq 0$, une force constante $\vec{F} = F\vec{u}_x$ ($F > 0$) est appliquée à l'extrémité A du fil (voir figure). La partie KA du fil reste tendue et horizontale.

a) Quel est l'axe instantané de rotation du yoyo dans le référentiel du sol R et dans le référentiel barycentrique R^* ?

b) Déterminer la relation entre la vitesse angulaire ω du yoyo et la vitesse $\dot{x}_C$ de son centre C.

c) Faire un bilan des forces sur le yoyo.

d) En utilisant le principe fondamental de la dynamique (loi de Newton) et/ou le théorème du moment cinétique, déterminer l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ et la vitesse angulaire ω du yoyo en fonction de R, b, m, J et F.

e) En déduire la position $x_C(t)$ de C à l'instant t.

f) En déduire la force de frottement du sol sur la yoyo en fonction de R, b, m, J et F.