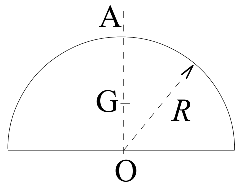
Examen de mécanique du solide

mardi 10 novembre 2020 (1,5 heure)

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.
Toutes les réponses doivent être justifiées. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. *(~ 5 points)*

Soit un demi-disque de rayon R et de centre O, homogène de masse m, d'épaisseur négligeable (la masse du disque est donc surfacique). L'axe (Oz) est l'axe perpendiculaire au plan du demi-disque passant par O.

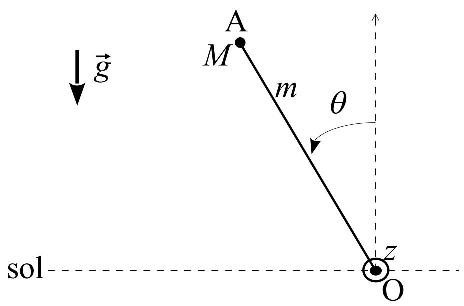


a) Calculer le moment d'inertie du demi-disque par rapport à l'axe (Oz).

b) En utilisant le fait que par symétrie le centre de gravité G du demi-disque est sur le segment [O,A] (voir figure), montrer que OG = $\dfrac{4R}{3\pi}$.

c) En déduire le moment d'inertie du demi-disque par rapport à l'axe (Az). (Az) est la droite parallèle à (Oz) passant par le point A défini sur la figure.

Exercice 2. Chute d'une barre rigide lestée *(~ 8 points)*



Une barre OA homogène de masse m et de longueur l = OA peut pivoter librement en O autour de l'axe (Oz) perpendiculaire au plan de la figure. Une masse ponctuelle $M = 2m$ est fixée rigidement à la barre en A. Initialement, la barre est verticale ($\theta=0$) puis elle est lâchée sans vitesse initiale. Elle tombe dans le sens indiqué par la figure.

Le moment d'inertie de la barre par rapport à un axe perpendiculaire à la barre passant par une de ses extrémités est $J=m\,l^2/3$.

Pour écrire les vecteurs on pourra utiliser la base polaire de centre O et d'angle θ défini sur la figure.

a) En utilisant le principe fondamental de la dynamique et/ou le théorème du moment cinétique, déterminer $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ (les dérivées temporelles première et seconde de θ) en fonction de θ et des données de l'énoncé (g, m et/ou l).

b) Retrouver ces expressions par un théorème d'énergie.

c) Déterminer la force $\vec{F}$ de l'axe (Oz) sur la barre en fonction de θ et des données de l'énoncé (g, m et/ou l).

d) Déterminer la vitesse du point A juste avant qu'il touche le sol.

Exercice 3. Glissement d'une boule de billard (~ 8 points)

Une boule de billard, sphérique, homogène de masse *m*, de rayon *R*, est lancée **sans vitesse de rotation initiale**, avec une vitesse $\vec{V}_0$ horizontale (vitesse de son centre C) sur un tapis de billard horizontal. La boule est toujours en contact avec le tapis. Soit I le point de contact entre la boule et le tapis. On supposera que les coefficients de frottement μ statique et dynamique sont égaux.

Le moment d'inertie de la boule par rapport a un axe passant par son centre C est $J=\frac{2}{5}mR^2$.

On étudie d'abord la première partie du mouvement pendant laquelle la boule **glisse** sur le tapis.

a) Faire un schéma indiquant la vitesse de C, la vitesse de glissement en I et les forces (avec leur sens) s'exerçant sur la boule.

b) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, expliquer pourquoi le mouvement du centre de masse de la boule est rectiligne.

Déterminer l'accélération du centre C de la boule. En déduire sa vitesse en fonction du temps.

c) En utilisant le théorème du moment cinétique, calculer la vitesse angulaire ω de la boule en fonction du temps. Représenter le sens de la rotation de la boule sur le schéma.

d) Calculer la vitesse de glissement $\vec{V}_g(t)$ de la boule sur rapport au sol en fonction du temps. Au bout de combien de temps cette vitesse s'annule-t-elle ?

La phase de glissement se terminer lorsque la vitesse de glissement s'annule. Après, la boule roule **sans glisser**.

e) Calculer l'accélération et la vitesse de la boule pendant la seconde phase (sans glissement). Que vaut la force de frottement pendant cette seconde phase ?