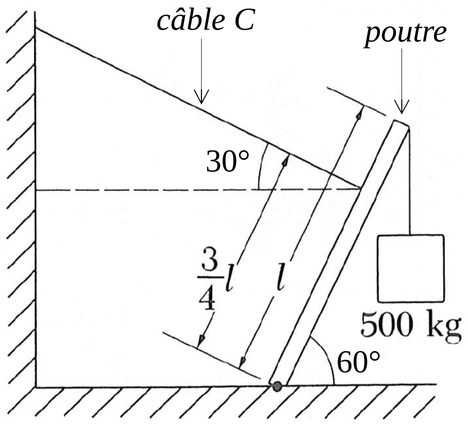
Examen de mécanique du solide

Vendredi 8 novembre 2019 (1,5 heure)
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.
Toutes les réponses doivent être justifiées. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. Question de cours (~ 3 points)

Énoncer et démontrer le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique *(relation qui relie le l'énergie cinétique d'un solide rigide (indéformable) dans le référentiel R et son énergie cinétique barycentrique (dans R*)).*

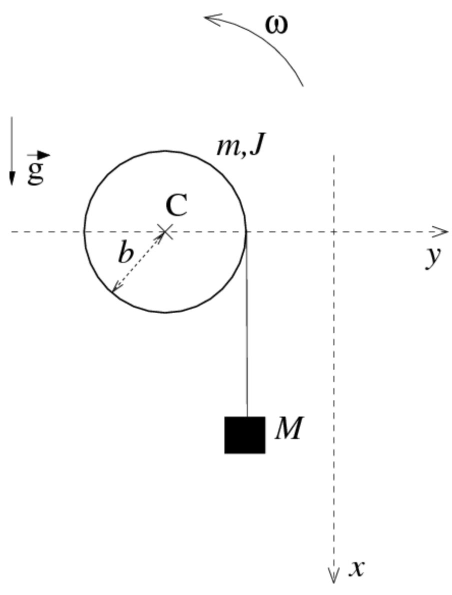
Exercice 2. Statique *(~ 4 points)*



Une poutre uniforme de 300 kg est soutenue par un câble C, comme sur la figure. Des angles et longueurs sont indiqués sur la figure. La base de la poutre est fixée à un pivot (pas de glissement) au sol et son extrémité supérieure supporte un poids de 500 kg.

Déterminer la tension dans le câble C et les composantes de la force que le sol exerce sur la poutre.

Exercice 3. Déroulement d'un fil *(~ 7 points)*



Une poulie circulaire, de rayon b, de centre C, de masse m, de moment d'inertie $J = mb^2/2$ par rapport à son axe, peut tourner librement (sans frottement) autour de son axe horizontal fixe. Un fil inextensible, de masse et de section négligeable, est initialement enroulé sur la poulie. Une masse M est attaché au bout du fil. Initialement le fil entre la poulie et M est tendu. La masse est lâchée sans vitesse initiale, puis le fil se déroule. On suppose que le fil ne glisse pas sur la poulie. Soit ω la vitesse angulaire de la poulie dans le sens indiqué sur la figure. Soit x la position de la masse M comme indiqué sur la figure.

a) Déterminer la relation entre ω et la vitesse de la masse M $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$.

b) En utilisant le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique, déterminer l'accélération de la masse M.

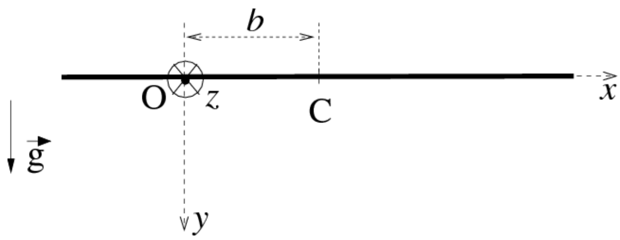
c) Déterminer la durée nécessaire pour que la masse M descende d'une distance L (par rapport à sa position initiale au repos).

Exercice 4. Mouvement d'une barre sur un axe horizontal *(~ 7 points)*

a) Déterminer le moment d'inertie J d'une barre homogène, de masse m, de longueur $2l$, par rapport à son axe de symétrie (axe perpendiculaire à la barre passant par son centre C).

En déduire le moment d'inertie J' de cette barre par rapport a un axe perpendiculaire à la barre passant par un le point O situé à la distance b du centre de la barre ($b < l$) .

Cette barre est posée sur une tige horizontale fixe de rayon négligeable coïncidant avec l'axe (Oz) de la figure. La tige et la barre sont perpendiculaires. Le contact entre la tige et la barre est caractérisé par un coefficient de frottement statique μ .



A l'instant initial, la barre est lâchée, sans vitesse initiale, dans la position horizontale coïncidant avec l'axe (Ox) de la figure, telle que OC = b, avec C est le centre de la barre et b une constante positive ($b < l$) (voir figure).

Soit θ l'angle entre l'axe horizontal (Ox) et la barre. Initialement $\theta = 0$.

On considère la première phase du mouvement pendant laquelle le contact en O est sans glissement.

b) Pendant cette première phase du mouvement:

b.1) Quel est le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ de la barre ?

b.2) Faire un bilan des forces sur la barre à un instant donné, les tracer sur un schéma.

b.3) Écrire l'énergie cinétique de la barre dans le référentiel du sol.

b.4) En déduire la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ en fonction de θ .

c) Pour quel angle θ_1 la barre commence-t-elle à glisser ?