# Examen de mécanique du solide

vendredi 10 novembre 2017 (1,5 heure)

*Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.*
*Toutes les réponses doivent être justifiées. Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

**Exercice 1.** (~ 3 points)

Énoncer et démontrer le théorème de Koenig pour le moment cinétique *(relation qui relie le moment cinétique en A d'un solide rigide dans le référentiel R et son moment cinétique barycentrique (dans R*)).*

**Exercice 2.** *(~ 9 points)*

Le manège figure 1 est modélisé par le schéma figure 2. Il est composé de deux barres homogènes :

- Une barre rigide AB, de masse $m_1$, de longueur $L_1$, pouvant tourner autour d'un axe fixe O$z$, en O milieu de AB.
- Une barre rigide CD, de masse $m_2$, de longueur $L_2$ ($L_2 < L_1$ ). La barre CD est fixée à la barre AB en B milieu de CD, et CD peut tourner librement (sans frottement) autour de l'axe B$z$.

Les deux barres restent dans le plan (O,$x$,$y$). Les positions des barres sont repérées par les angles $\theta$ et $\varphi$ des barres AB et CD par rapport à l'axe vertical O$x$ (voir figure 2).

Un moteur exerce en O un couple de forces de moment $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$ sur la barre AB. Les autres forces de frottement entre l'axe O$z$ et la barre AB sont négligées.

On appelle $S$ le système composé des deux barres : $S$ = {barre AB, barre CD}

*Rappel : le moment d'inertie d'une barre homogène de masse m et de longueur L, par rapport à un axe passant par son centre est* $J = mL^2/12$ .


*figure 1*

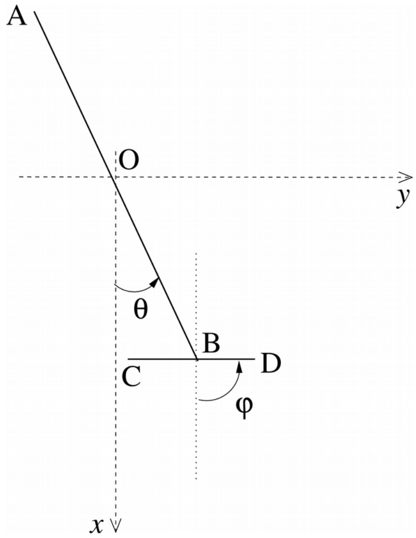



*figure 2*

a) $S$ est-t-il un solide indéformable ?

b) Écrire les vecteurs instantanés de rotation des deux barres.

c) Déterminer dans le référentiel $R$ lié au sol, en fonction de $m_1$, $L_1$, $m_2$, $L_2$, et des dérivées temporelles $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ et $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ :

i. Le moment cinétique barycentrique (c'est à dire dans $R$*) de la barre CD.

ii. Le moment cinétique en O de la barre CD.

iii. Le moment cinétique en O du système $S$ = {barre AB, barre CD}.

iv. L'énergie cinétique du système $S$ = {barre AB, barre CD}

d) Faire un bilan des actions mécaniques sur la barre CD et sur le système $S$.

e) En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer deux équations différentielles du mouvement (équations différentielles dont $\theta(t)$ et/ou $\varphi(t)$ sont solutions. $t$ est le temps).

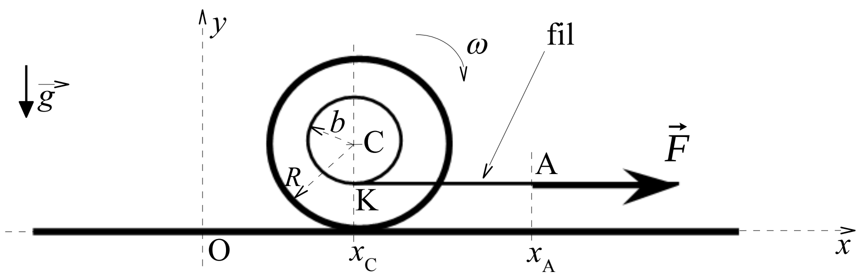
f) Retrouver une des équations trouvées dans la question précédente par un théorème d'énergie appliqué au système $S$.

g) Application : On suppose que le couple moteur est arrêté $\Gamma=0$, la liaison de rotation en O de la barre AB est donc libre (sans frottement). Initialement $\theta=\pi$, $\varphi=\pi/2$ et le système est immobile, puis AB tourne librement sous l'effet du poids dans le sens des $\theta$ croissants :

i. Déterminer $\varphi(t)$ pour t > 0.

ii. Déterminer la vitesse de B lorsque $\theta=2\pi$.

**Exercice 3. Mouvement horizontal d'un Yoyo** *(~ 8 points)*




Un yoyo de rayon interne $b$, de rayon externe $R$, de masse $m$, et de moment d'inertie $J$ par rapport à son axe de symétrie, est posé sur le sol horizontal. Initialement, le yoyo ne bouge pas et l'abscisse de son centre C est $x_C = 0$ (voir figure). On supposera que le mouvement du yoyo reste dans le plan (O,$x$,$y$) et que le yoyo ne glisse jamais. Le coefficient de frottement statique entre le yoyo et le sol est $\mu$. Le fil du yoyo est supposé inextensible et sans masse ; il peut s'enrouler sur la bobine de rayon $b$ du yoyo et il reste tendu entre K et A.

Aux temps $t \geq 0$, une force constante $\vec{F}=F\,\vec{u}_x$ ($F > 0$) est appliquée au bout A du fil (voir figure).

*Indication : Expérimentalement, le yoyo se déplace dans le sens de $\vec{F}$ (vers les x croissants sur le schéma), le fil s'enroule sur le yoyo et les points A et C se déplacent dans le sens de $\vec{F}$.*

a) Quel est l'axe instantanés de rotation du yoyo dans le référentiel du sol $R$ et dans le référentiel barycentrique $R^*$ ?

b) Déterminer la relation entre la vitesse angulaire $\omega$ du yoyo et la vitesse $\dot{x}_C$ de son centre C.

c) Faire un bilan des forces sur le yoyo.

d) En utilisant le principe fondamental de la dynamique (théorème de la résultante cinétique) et le théorème du moment cinétique, déterminer l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ et la vitesse angulaire $\omega$ du yoyo en fonction de $R$, $b$, $m$, $J$, $F$ et du temps $t$.

e) En déduire la position $x_C(t)$ de C à l'instant $t$.