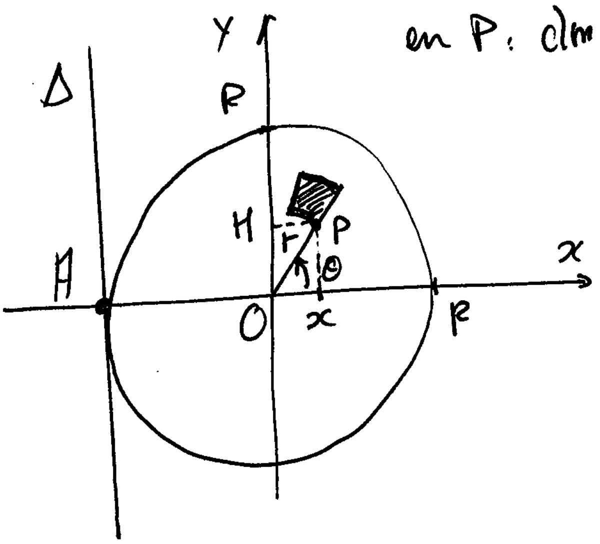
L2 - **Examen de Mécanique du Solide** (10/11/2016)

Corrigé

Ex 1 : a) avec masse surfacique σ uniforme (car homogène)

$$m = \iint dm = \iint \sigma\, dS = \sigma \iint dS = \sigma S$$
$$= \sigma \pi R^2$$

en P : $dm(P) = \sigma\, dS = \sigma\, dr\, r\, d\theta$ (polaires)



Moment d'inertie par rapport à (Oy)

$$J = \iint_{P \in \text{disque}} HP^2\, dm(P)$$

avec H = projection de P sur (Oy)

donc $HP = x = r\cos\theta$

$$J = \iint r^2 \cos^2\theta\, \sigma\, dr\, r\, d\theta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \sigma \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \sigma \frac{R^4}{8}\left[\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta\right] = \sigma \frac{R^4}{8}\left(2\pi + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}}_{=0}\right)$$

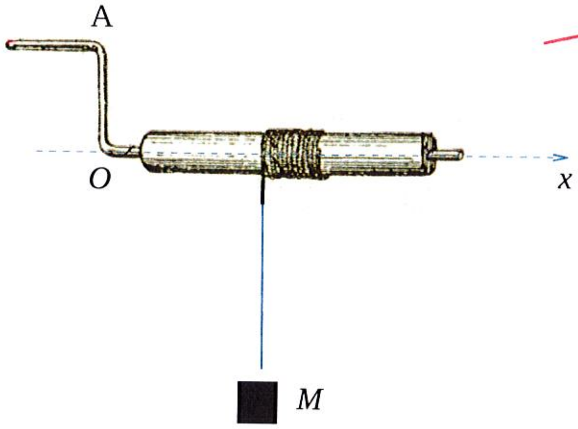
$$J = \frac{1}{4}\sigma \pi R^4 = \frac{1}{4} m R^2$$

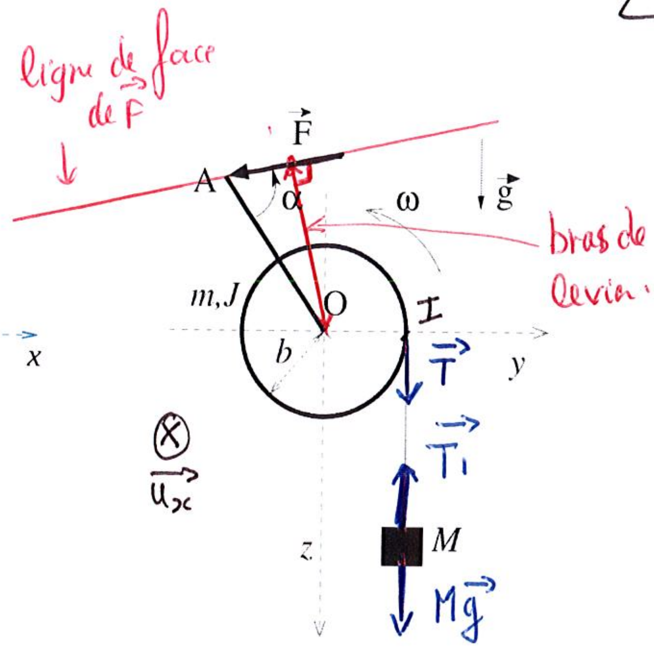
b) (Moment d'inertie par rapport à Δ // (Oy) : J') Huygens : $J' = J + d^2 m$

car G ∈ (Oy) ; d : distance entre Δ et Oy

$$J' = \frac{1}{4} m R^2 + R^2 m = \boxed{\frac{5}{4} m R^2}$$

Exercice 2. Élévateur à manivelle





a) $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F} = -d\, F \sin\alpha \; \vec{u_x}$

ligne de force de $\vec{F}$: ligne passant par A // à $\vec{F}$

bras de levier de $\vec{F}$ en O : distance O — ligne de force de $\vec{F}$

c à d $\underline{\underline{d \sin\alpha}}$

$\|\vec{M}_O(\vec{F})\|$ est maximal pour $\sin\alpha = 1$ c'est à dire $\underline{\underline{\alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}}}$

b) le fil ne glisse pas sur la roue

donc $\vec{v}(I_1 \in \text{roue}) = \vec{v}(I_2 \in \text{fil}) = \vec{v}(M)$

avec $I_1 \equiv I_2 \equiv I$ point de contact fil/roue sur l'axe (Oy)

Varignon : $\frac{d\,\vec{OI_1}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}$ car O et I_1 fixes par rapport à la roue.

$\vec{v}(I_1) - \underbrace{\vec{v}(O)}_{=\vec{0}\ (\text{fixe})} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}$ avec $\vec{OI} = b\,\vec{u_y}$

$\vec{\Omega}_{\text{roue}} = -\omega\,\vec{u_x}$ avec $\omega > 0$ car rotation autour axe fixe.

donc $\vec{v}(I_1) = -\omega\,\vec{u_x} \wedge b\,\vec{u_y} = -\omega\, b\,\vec{u_z}$

$\vec{v}(I_1) = \vec{v}(M) = \dot{z}\,\vec{u_z}$ donc $\underline{\underline{\dot{z} = -\omega b}}$

c) P. F. D. pour le système $\{M\}$ dans réf lié au Sol (Galiléen)

$$M \,\dot{\vec{v}}\,(\text{masse } M) = M\vec{g} + \vec{T_1}$$ ← force du fil sur M

proj. sur (Oz) : $M\ddot{z} = Mg - \|\vec{T_1}\|$ ①

Pour le fil entre I et M ; de masse nulle :

$$\Big(\underbrace{-\vec{T_1}}_{\text{force M sur fil}} + \underbrace{(-\vec{T})}_{\text{force roue sur fil}}\Big) = \vec{0}$$

donc $\vec{T} = -\vec{T_1} = T\,\vec{u_z}$

donc (1) s'écrit $M\ddot{z} = Mg - T$ ②

Pour le système $\{$roue + Manivelle$\}$: rotation autour de l'axe fixe (Ox) dans Réf du sol (Galiléen)

donc : $L_{(Ox)} = \vec{L_O}\cdot\vec{u_x} = -J\,\omega$

avec J moment d'inertie de la roue (car la manivelle est de masse $=0$)

$$J = \frac{1}{2} m b^2$$

donc le moment cinétique du système $\{$roue, Manivelle$\}$ par rapport à l'axe (Ox) est $L_{(Ox)} = -\frac{1}{2} m b^2 \omega$

forces sur ce système : . poids roue appliqué en O $m\vec{g}$

. $\vec{T}$ du fil appliquée en I

. $\vec{F}$ appliquée en H

th du moment cinétique projeté sur l'axe (Ox)

$$\frac{d}{dt} L_{Ox} = \left(\underbrace{\overrightarrow{OO}}_{=\vec{0}} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OI} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} \right) \cdot \vec{u_x}$$

$$-\frac{mb^2}{2}\dot{\omega} = \left(0 + b\vec{u_y} \wedge T\vec{u_z} - dF\vec{u_x} \right) \cdot \vec{u_x}$$

$$-\frac{mb^2\dot{\omega}}{2} = bT - dF$$

d'après équation ② : $\frac{mb^2\dot{\omega}}{2} = dF + bM\ddot{z} - Mgb$

or $\dot{z} = -b\omega$ donc $\ddot{z} = -b\dot{\omega}$

ainsi $\dot{\omega}\left(\frac{mb^2}{2} + b^2M\right) = dF - Mgb$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2}{b^2(m+2M)}(dF - Mgb)} = c^{te}$$

donc : $\omega(t) = \dot{\omega}\, t + 0$ ← vitesse initiale $= 0$ (repos)

d) $\dot{z} = -b\dot{\omega}t$

et $\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}b\dot{\omega}t^2 + L_0}$ ← position initiale

e) <u>Par l'énergie :</u>

liaison parfaite entre axe et la roue donc les forces de frottement ne travaillent pas.

De même pas de glissement entre le fil et la roue donc le frottement fil / roue ne travaille pas

Le fil est inextensible, donc la tension le long du fil ne travaille pas.

$\Rightarrow$ on peut considérer le système { roue, manivelle, fil, masse M }

Energie cinétique de ce système : $E_c = \underbrace{\frac{1}{2} J\omega^2}_{\text{roue}} + \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{z}^2}_{\text{masse } M}$

$$E_c = \frac{1}{4} m b^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M b^2 \omega^2$$

Les seules forces qui travaillent sont $m\vec{g}$ et $\vec{F}$

puissance $\mathcal{P}(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \vec{v}(M) = Mg\dot{z} = -Mgb\omega$

$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(A) = \omega \ell F$ (car $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

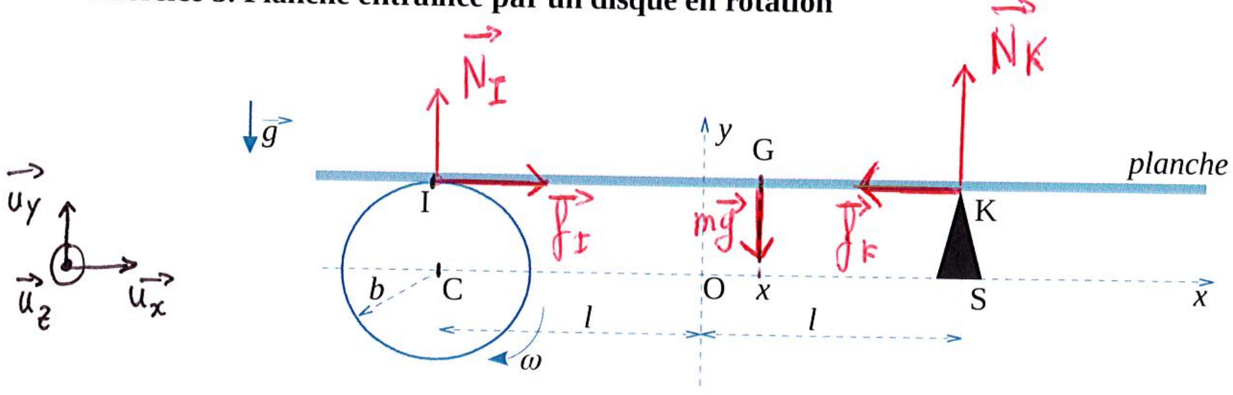
Th de la puissance cinétique dans le Réf du sol (Galiléen)

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\vec{F})$$

$$\left(\frac{m}{2} + M\right) b^2 \dot{\omega} \cancel{\omega} = -Mgb\cancel{\omega} + \ell F \cancel{\omega}$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2}{(m + 2M) b^2} (\ell F - Mgb)}$$

Exercice 3. Planche entraînée par un disque en rotation



a) En I, pas de glissement donc $\begin{cases} \vec{v}(I_1 \in \text{roue}) = \vec{v}(I_2 \in \text{planche}) = \dot{x}\,\vec{u_x} \\ \text{avec } I \equiv I_1 \equiv I_2 \text{ à chaque instant} \end{cases}$

$I_1 \in$ roue et $C \in$ roue : $\quad \vec{v}(I_1) - \underbrace{\vec{v}(C)}_{=\vec{0}} = \dfrac{d\,\vec{CI_1}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{CI_1}$ (Varignon)

avec $\begin{cases}\vec{\Omega}_{\text{roue}} = -\omega\,\vec{u_z}\end{cases}$: $\quad \vec{v}(I_1) = -\omega\,\vec{u_z} \wedge b\,\vec{u_y} = \omega b\,\vec{u_x}$
$= \dot{x}\,\vec{u_x}$

donc $\boxed{\dot{x} = \omega b}$

b) forces extérieures sur la planche : (voir schéma)

- force de contact de la roue sur la planche en I : $\vec{N_I} + \vec{f_I}$ en I
- " " du support " en K : $\vec{N_K} + \vec{f_K}$ frottement en K
- poids de la planche : $m\vec{g}$ en G

avec $\vec{N_I} = N_I\,\vec{u_y}$ $\quad \vec{f_I} = f_I\,\vec{u_x}$ $\quad ; \quad m\vec{g} = -mg\,\vec{u_y}$

et $\vec{N_K} = N_K\,\vec{u_y}$ $\quad \vec{f_K} = f_K\,\vec{u_x}$

Rmq : $f_K < 0$ car glissement en K donc $\vec{f_K}$ opposée à la vitesse de la planche

c) Système : {planche} :

PFD dans Réf du sol Galiléen : $\quad m\,\dot{\vec{v}}(G) = \sum \vec{\text{forces ext sur planche}}$.

$$m\,\ddot{x}\,\vec{u_x} = \vec{N_I} + \vec{N_K} + \vec{f_I} + \vec{f_K} + m\vec{g}$$

par projection sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_I + f_K & (1) \\ 0 = N_I + N_K - mg & (2) \end{cases}$$

Th. du moment cinétique en G (dans Réf du sol, galiléen) :

La planche ne tourne pas autour de G donc : $\overrightarrow{L_G}(\text{planche}) = \vec{0}$

$$\frac{d\overrightarrow{L_G}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\text{force ext})$$

$$\vec{0} = \underbrace{\overrightarrow{GI}}_{\perp} \wedge \overrightarrow{N_I} + \underbrace{\overrightarrow{GK}}_{\perp} \wedge \overrightarrow{N_K} + \underbrace{\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{f_I}}_{\substack{=\vec{0} \\ \text{car} \parallel}} + \underbrace{\overrightarrow{GK} \wedge \overrightarrow{f_r}}_{\substack{=\vec{0} \\ \text{car} \parallel}} + \underbrace{\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g}}_{=\vec{0}}$$

$$\vec{0} = \Big(-\underbrace{(\ell + x)}_{GI} N_I + \underbrace{(\ell - x)}_{GK} N_K \Big) \vec{u_z}$$

donc $(\ell - x) N_K - (\ell + x) N_I = 0$ ③

D'après ② et ③ on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} N_I = mg \dfrac{\ell - x}{2\ell} & ④ \\ N_K = mg \dfrac{\ell + x}{2\ell} & ⑤ \end{cases}}$$

or en K : il y a glissement donc $\|\overrightarrow{f_K}\| = \mu_d \|\overrightarrow{N_K}\|$

puisque $\dot{x} > 0$: $\underline{f_K = -\mu N_K}$ ⑥ < 0 ($\overrightarrow{f_K}$ opposé à la vitesse de glissement)

De plus, puisque $\dot{x} = \omega b$ avec $\omega = c^{te}$, $x(t) = \omega b t + 0$ (condition initiale à $t = 0$)

et $\ddot{x} = 0$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned} N_I &= mg \frac{\ell - \omega b t}{2\ell} \qquad N_K = mg \frac{\ell + \omega b t}{2\ell} \\ f_K &= -\mu\, mg \frac{\ell + \omega b t}{2\ell} \\ ① \Rightarrow \quad f_I &= m\ddot{x} - f_K = +\mu\, mg \frac{\ell + \omega b t}{2\ell} \end{aligned}}$$

<u>Rmq</u> : pour qu'il n'y ait pas de glissement en I, il faut que $|F_I| \leq \mu_s N_I$ (à $t=0$)

ce qui est toujours bien vérifié,

car $\mu_s > \mu_d$

d) pour $t \leq t_1 \Leftrightarrow$ pas de glissement en I donc $|F_I| \leq \mu_s N_I$

soit $$\mu_d \cancel{mg} \frac{l + \omega t b}{\cancel{2l}} \leq \mu_s \frac{l - \omega t}{\cancel{2l}} \cancel{mg}$$

$$(\mu_d + \mu_s)\, \omega t b \leq l(\mu_s - \mu_d)$$

$$t \leq \underbrace{\frac{l}{\omega b} \frac{\mu_s - \mu_d}{\mu_d + \mu_s}}_{t_1} > 0 \text{ car } \mu_s > \mu_d$$

donc $$\boxed{t_1 = \frac{l}{\omega b} \frac{\mu_s - \mu_d}{\mu_d + \mu_s}}$$

Soit $$\boxed{x_1 = x(t_1) = l \frac{\mu_s - \mu_d}{\mu_d + \mu_s}}$$

Rmq : $\mu_s > \mu_d$ donc $x_1 < l$ ce qui est normal.