

Examen de mécanique du solide

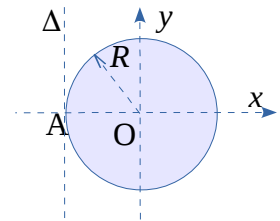
Jeudi 10 novembre 2016 (1,5 heure)

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif. Toutes les réponses doivent être justifiées.
Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1. (~ 5 points)

Soit un disque de rayon R et de centre O , homogène de masse m . L'axe (Oy) est l'axe parallèle au plan du disque passant par O (voir figure).

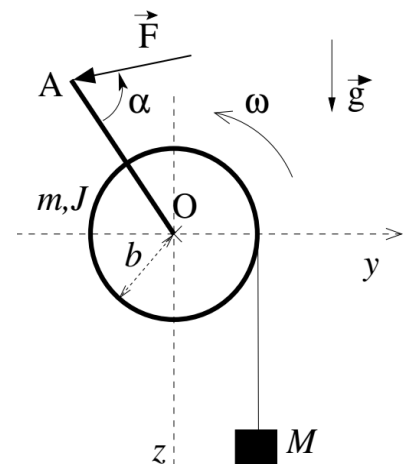
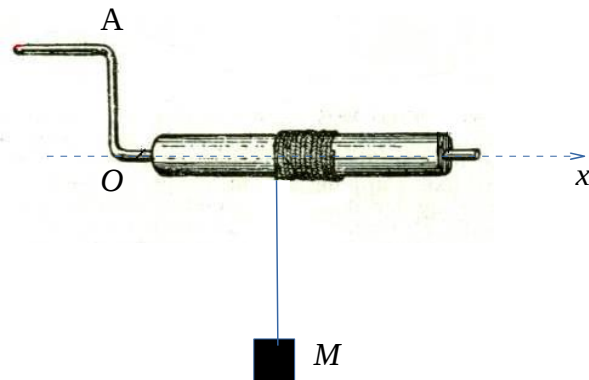
- Calculer le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe (Oy) .
- En déduire le moment d'inertie du disque par rapport à la droite Δ parallèle à (Oy) passant par le point A sur le cercle de rayon R et de centre O .



Indication : vous pouvez considérer une épaisseur du disque e avec une masse volumique, ou bien considérer une épaisseur négligeable avec une masse surfacique.

Rappel : $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ et $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$

Exercice 2. Élévateur à manivelle (~ 10 points)



Un cylindre d'axe horizontal, de masse m , de rayon b et de moment d'inertie $J = mb^2/2$, peut tourner librement (liaison parfaite) autour de son axe horizontal (Ox) . Une manivelle (barre) OA de masse négligeable, de longueur $d = OA$, est fixée solidairement au cylindre dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. OA tourne donc avec le cylindre. Une masse M est attachée au bout d'un fil, inextensible, de masse négligeable et de section négligeable. Le fil peut s'enrouler sans glisser sur le cylindre. A l'instant initial la masse est au repos à $z = L_0$.

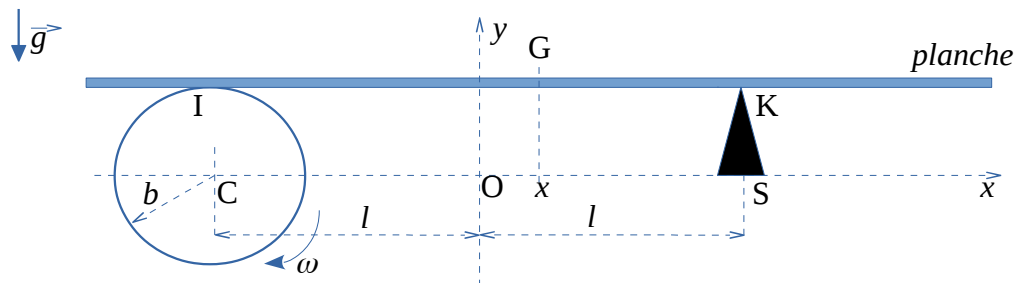
Aux temps $t \geq 0$, une force \vec{F} constante est appliquée sur la manivelle en A (la force est dans le plan de la figure). Soit α l'angle entre (OA) et \vec{F} . On supposera α constant pendant tout le mouvement.

- Calculer le moment de la force \vec{F} par rapport à O . Définir et représenter sur un schéma la ligne de force de \vec{F} et le bras de levier de cette force. Pour quel angle α_0 le moment de \vec{F} est-il maximal ?

Dans la suite de l'exercice on supposera que α est fixe et qu'il a la valeur α_0 calculée dans la questions précédente.

- Déterminer la relation entre la vitesse angulaire ω du cylindre et la vitesse \dot{z} de la masse M .
- En utilisant le principe fondamental de la dynamique (théorème de la résultante cinétique) et le théorème du moment cinétique, déterminer l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ et la vitesse angulaire ω de la masse M dans le référentiel (O,x,y,z) , en fonction de b, d, m, M, F et du temps t .
- En déduire la position $z(t)$ de la masse M à l'instant t .
- Retrouver la valeur de l'accélération angulaire $\dot{\omega}$, par un théorème d'énergie ou de puissance.

Exercice 3. Planche entraînée par un disque en rotation (~ 10 points)



Un cylindre de rayon b , tourne à la vitesse angulaire constante ω dans le sens indiqué sur la figure ($\omega > 0$), autour de son axe fixe (Cz) . Une planche indéformable, homogène de masse m , d'épaisseur négligeable est placée horizontalement sur le cylindre et un support (fixe) en S (voir figure). Le coefficient de frottement statique planche/cylindre en I est μ_s et le coefficient de frottement dynamique planche/support en K est μ_d , avec $\mu_s > \mu_d$. La planche est suffisamment longue pour être toujours en contact avec le support et le cylindre en K et I (voir figure). La planche se déplace donc horizontalement. On suppose qu'il n'y a pas de glissement au point de contact I entre la planche et le cylindre.

Soit O le milieu de $[C,S]$ et G le centre de gravité de la planche. On note x l'abscisse de G dans $(O;x,y,z)$.

Soient $\vec{R}_K = f_K \vec{u}_x + N_K \vec{u}_y$ et $\vec{R}_I = f_I \vec{u}_x + N_I \vec{u}_y$ les forces de contact du support sur la planche en K et du cylindre sur la planche en I .

- Déterminer la relation entre ω , b et \dot{x} .
- Faire un schéma représentant toutes les forces extérieures sur la planche et leur points d'application.
- En utilisant le principe fondamental de la dynamique (théorème de la résultante cinétique) et le théorème du moment cinétique, déterminer f_K , N_K , f_I et N_I en fonction des données de l'énoncé et du temps t .
- Quel est le temps t_1 et la position x_1 de G pour lesquels un glissement apparaît entre la planche et le cylindre en I ?