L2 : Examen de mécanique du solide - 2 novembre 2015

Ex 1. Questions

a) 1. Un couple de force est un ensemble de forces agissant sur un système dont la résultante $\vec{R}$ est nulle.

2. Si les forces du couple sont ponctuelles : $\vec{F_i}$ appliquée en P_i avec $i = 1, \dots, N$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = \vec{0}$$

le moment du couple en O est $\vec{\mathcal{M}_0} = \sum_{i=1}^{N} \vec{OP_i} \wedge \vec{F_i}$

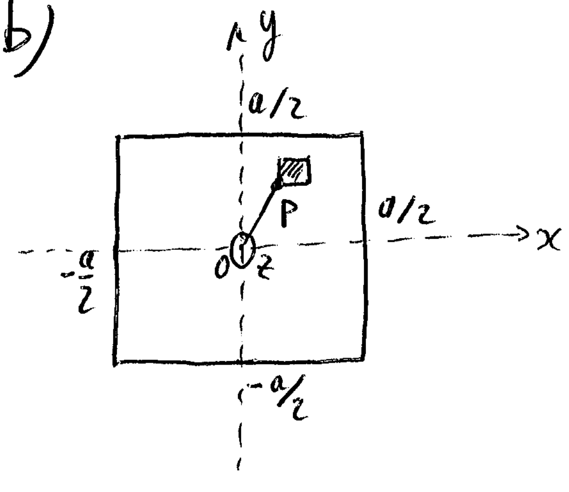
le moment du couple en O' est $\vec{\mathcal{M}_{O'}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{O'P_i} \wedge \vec{F_i}$

$$\vec{\mathcal{M}_{O'}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{O'O} + \vec{OP_i}) \wedge \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{O'O} \wedge \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{OP_i} \wedge \vec{F_i}$$

$$= \vec{O'O} \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}}_{= \vec{R}_{\text{couple}} = \vec{0}} + \vec{\mathcal{M}_0}$$

donc $\begin{cases} \underline{\underline{\vec{\mathcal{M}_{O'}} = \vec{\mathcal{M}_0}}} \\ \forall O \text{ et } O' \end{cases}$: le moment d'un couple est indépendant du point par rapport auquel on le calcule.

b)



masse surfacique σ uniforme donc

$$m = \iint \sigma \, ds = \sigma \iint ds = \sigma S$$

$$m = \sigma a^2$$

par définition le moment d'inertie de la plaque par rapport à (Oz) est $J_{(Oz)} = \iint_{P \in \text{plaque}} OP^2 \, dm(P)$

car $\forall P \in$ plaque : O est la projection de P sur (Oz)

en coord. cartésiennes $OP^2 = x^2 + y^2$ avec $P(x,y)$

et $dm = \sigma \, dx \, dy$

donc $$J_{(Oz)} = \iint_{P \in \text{plaque}} (x^2 + y^2)\, \sigma \, dx \, dy$$

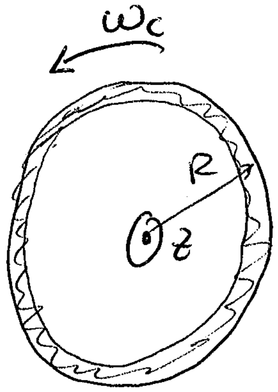
$$= \sigma \iint x^2 \, dx \, dy + \sigma \iint y^2 \, dx \, dy$$

$$= \sigma \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \, dx \int_{-a/2}^{a/2} dy + \sigma \int_{a/2}^{a/2} y^2 \, dy \int_{-a/2}^{a/2} dx$$

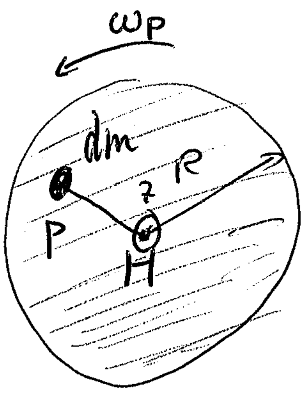
$$= \sigma \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \left(\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}}\right) + \sigma \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \left(\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \sigma \frac{a^4}{3 \times 2^2} \, 2 = \underline{\underline{\frac{m}{6} a^2}}$$

c)



cylindre creux d'axe (Oz)



cylindre plein d'axe (Oz)

moment d'inertie /(Oz) $J = \iint_{P \in \text{cylindre}} dm(P)\, PH^2$

H : projection de P sur (Oz)

la masse du cylindre creux est plus éloignée de l'axe (Oz) que la masse du cylindre plein donc

$J_{creux} > J_{plein}$

Si le cylindre est mis en rotation autour de sont axe (Oz) par le moment $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u_z}$ le th du moment cinétique autour d'un axe fixe s'écrit

$$J \dot{\omega} = \Gamma \vec{u_z} \cdot \vec{u_z} = \Gamma$$

$$\dot{\omega} = \frac{\Gamma}{J} \quad (*)$$

soit $\dot{\omega}_p$ l'accélération angulaire du cylindre plein

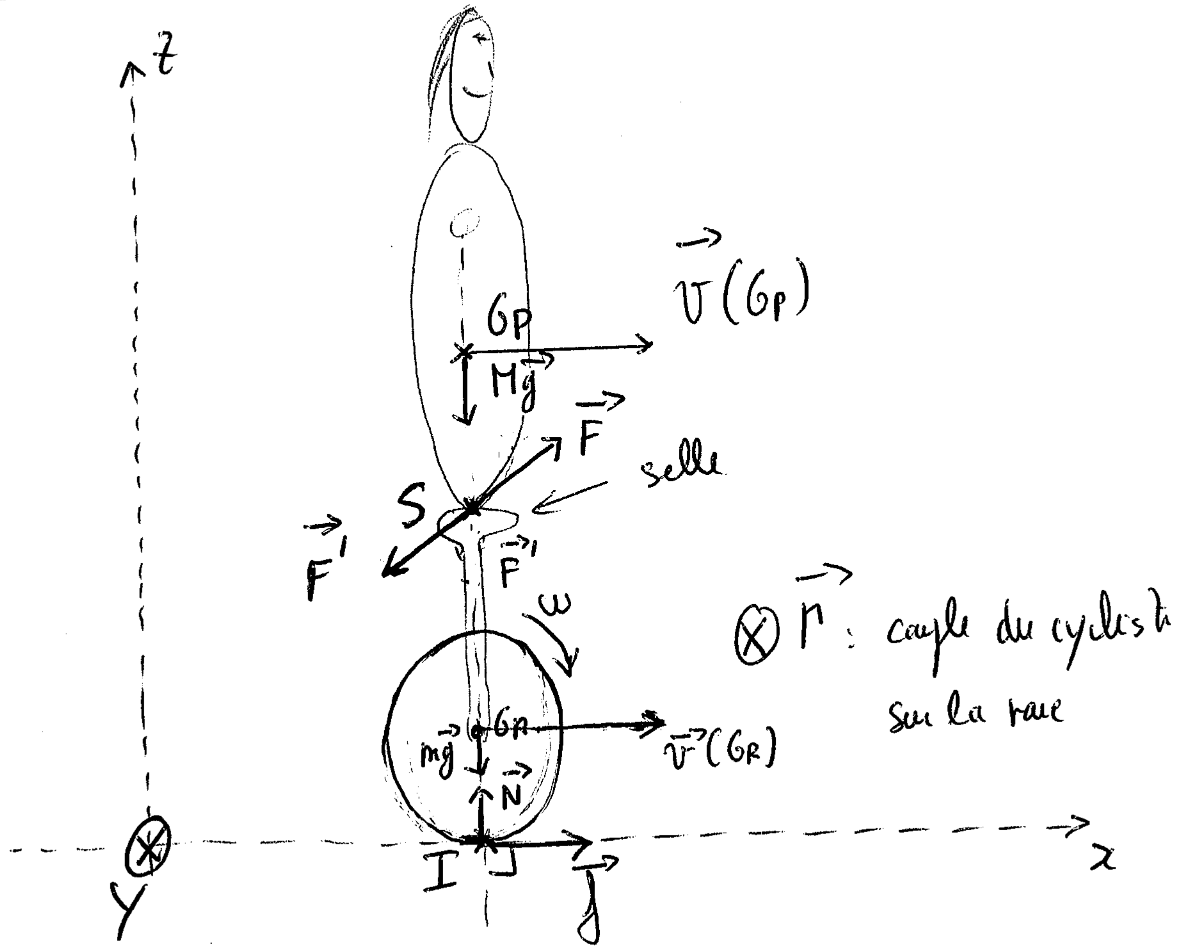
ω_c " " " creux

$J_{creux} > J_{plein}$ donc d'après (*) $\underline{\dot{\omega}_p > \dot{\omega}_c}$

<u>le cylindre plein tournera donc plus vite que le cylindre creux.</u>

Ex 2 : Mono-cycle sur plan horizontal

a)



forces sur le mono-cycle (roue + selle + tube sans masse) :

- poids de la roue $m\vec{g}$ appliqué en G_R
- force du sol sur la roue $\underset{\uparrow \perp \text{sol}}{\vec{N}} + \vec{f}$ ← frottement
- couple de force moteur (du cycliste sur la roue) : $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u_z}$
- force de la personne sur le mono-cycle $\vec{F}'$ appliqué en S.

forces sur la personne :

- poids de la personne $M\vec{g}$ appliqué en G_P
- force du monocycle sur la personne $\vec{F} = -\vec{F}'$ appliqué en S (action/réaction)

b) Soit I le point de contact entre la roue et le sol.
Soit $I_R \in$ roue / à l'instant t $I_R \equiv I$

I_R et $G_R \in$ roue donc d'après Varignon : $\vec{v}(G_R) - \vec{v}(I_R) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{I_R G_R}$
avec $\vec{\Omega} = \omega \vec{u_y}$ vecteur rotation de la roue.
$\vec{v}(I_R) = \underbrace{\vec{v}(\text{sol})}_{=\vec{0}}$ car pas de glissement

donc $\vec{v}(G_R) = \omega \vec{u_y} \wedge b \, \vec{u_z} = \underline{\underline{b\omega \vec{u_x}}}$ (1)

La personne reste à la verticale du mono-cycle
donc $\vec{v}(G_P) = \vec{v}(G_R) = b\omega \vec{u_x}$

c) PFD pour le monocycle : $m \dot{\vec{v}}(G_R) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{F'}$ (2)
" " la personne : $M \dot{\vec{v}}(G_P) = M\vec{g} + \vec{F}$ (3)

(2) + (3) $\quad (m + M) \dot{\vec{v}}(G_R) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} + M\vec{g}$ (4)
car $\vec{F} + \vec{F'} = \vec{0}$

projections verticale et horizontale de (4)

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x} = f & (5) \\ 0 = -mg - Mg + N & (6) \end{cases}$$

avec $\vec{f} = f \vec{u_x}$, $\vec{N} = N \vec{u_z}$ et $\vec{g} = -g \vec{u_z}$

et $x = x(G_R)$

d) la roue tourne autour de $(G_R y)$

Th du moment cinétique barycentrique (R^* : réf barycentrique)

$$\frac{d\overrightarrow{L^*}(\text{roue})}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G_R}(\text{force sur roue})$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{G_R G_R}}_{=\vec{0}} \wedge m\vec{g} + \overbrace{\overrightarrow{G_R I} \wedge \vec{N}}^{=\vec{0} \text{ car } //} + \overrightarrow{G_R I} \wedge \vec{f}$$

$$+ \underbrace{\overrightarrow{G_R G_R}}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{F_{axe}} + \underbrace{\vec{\Gamma}}_{\text{appliquée en } G_R}$$

où $\overrightarrow{F_{axe}}$ est la force de l'axe de la roue sur la roue :

$$\frac{d\overrightarrow{L^*}(\text{roue})}{dt} = -b\,\vec{u_z} \wedge f\,\vec{u_x} + \underbrace{\Gamma\,\vec{u_y}}_{\text{couple moteur}}$$

$$= -b f\,\vec{u_y} + \Gamma\,\vec{u_y}$$

projection sur $\vec{u_y}$

$$\frac{d\,\overrightarrow{L^*}\cdot\vec{u_y}}{dt} = -bf + \Gamma$$

or $\overrightarrow{L^*}\cdot\vec{u_y} = L^*_{(Gy)} = +J_{roue}\,\omega = mb^2\omega$

donc $\underline{\underline{m b^2 \dot{\omega} = -bf + \Gamma}}$ (7)

d'après (5) et (1) ($\dot{x} = b\omega$) il vient

$$m b \ddot{x} = -b\ddot{x}(m+M) + \Gamma$$

d'où $\boxed{\ddot{x} = \frac{\Gamma}{(2m+M)b}}$ $\left\{ \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u_x}\right.$ accélération de l'ensemble

f) d'après (5)

$$f = (m+M)\,\ddot{x}$$

$$(8) \quad \boxed{f = \Gamma \frac{(m+M)}{(2m+M)\,b} \quad \text{avec } \vec{f} = f\,\vec{u_x}}$$

g) Il n'y a pas de glissement ssi $\|\vec{f}\| \leq \mu \|\vec{N}\|$

(frottement statique)

d'après (6) : $N = (m+M)\,g$

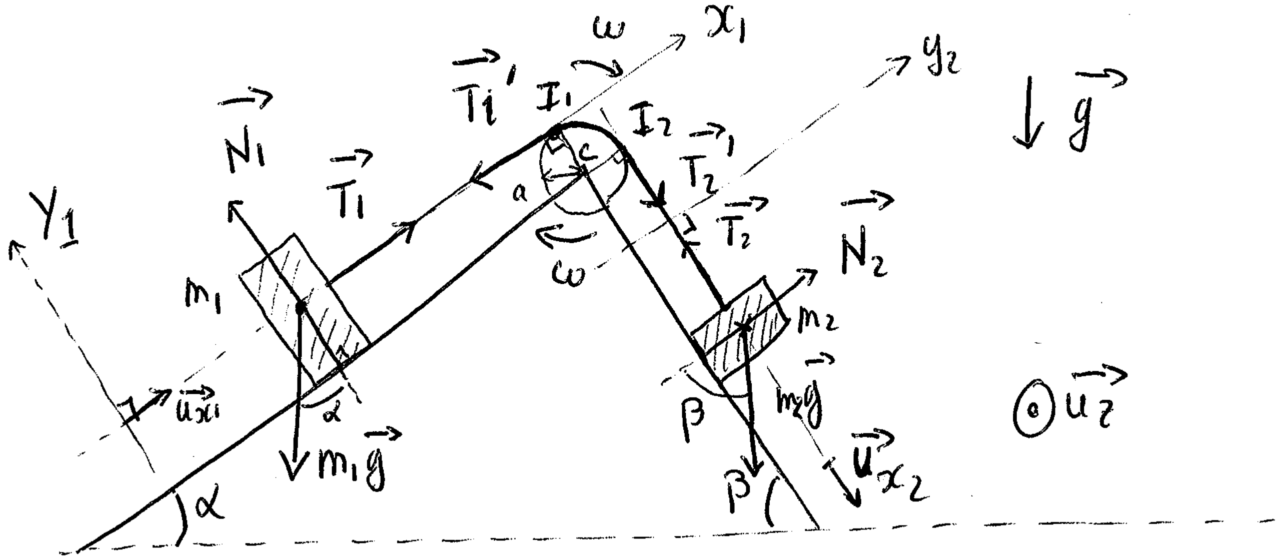
avec (8) il vient donc :

$$\Gamma \frac{\cancel{m+M}}{2m+M} \frac{1}{b} \leq \mu \cancel{(m+M)}\, g$$

$$\underline{\underline{\Gamma \leq \mu\,(2m+M)\,b\,g}}$$

si $\Gamma > \mu\,(2m+M)\,b\,g$, la roue du mono-cycle dérape.

Ex 3 : Masses en mouvement sur deux plans inclinés



Soient x_1 et x_2 les positions des centres de masse G_1 et G_2 de m_1 et m_2 le long des axes (x_1) et (x_2) voir figure.

a) la corde est inextensible donc elle est le longueur constante
donc $x_2 - x_1 = c^{te}$: en dérivant : $\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1$

La corde ne glisse pas sur la poulie donc en I_1 : $v(I_1 \text{ corde}) = v(I_1 \text{ poulie})$

$\vec{v}(I_1 \in \text{corde}) = \dot{x}_1 \vec{u}_{x_1}$ car corde inextensible

$\vec{v}(I_1 \in \text{corde}) = \vec{v}(\text{masse } 1) = \vec{v}(G_1)$

de plus d'après Varignon $\vec{V}(I_1 \in \text{poulie}) - \underbrace{\vec{v}(c)}_{\vec{0}} = \vec{CI_1} \wedge \vec{\Omega}$ ($\in$ poulie)

avec $\begin{cases} \vec{\Omega} = -\omega \vec{u_z} \\ \text{rotation poulie} \end{cases}$ donc $\vec{V}(I_1 \in \text{poulie}) = a\vec{u}_{y_1} \wedge (-\omega \vec{u_z})$
$= a\omega \vec{u_x}$

donc $\dot{x}_1 = a\omega$

ainsi $\underline{\underline{\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = a\omega}}$ (1)

et en dérivant $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a\dot{\omega}$

b) dans le référentiel R du sol galiléen

- PFD pour m_1 : $\underline{\vec{N_1} + m_1\vec{g} + \vec{T_1} = m_1 \ddot{x}_1 \vec{u_{x1}}}$ (2)
- " " m_2 : $\underline{\vec{N_2} + m_2\vec{g} + \vec{T_2} = m_2 \ddot{x}_2 \vec{u_{x2}}}$ (3)

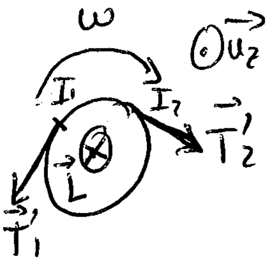
La corde est de masse nulle donc $\|\vec{T_1}\| = \|\vec{T_1}'\|$

ici $\vec{T_1} = T_1 \vec{u_{x1}} = -\vec{T_1}'$

et $\|\vec{T_2}\| = \|\vec{T_2}'\| \Rightarrow \vec{T_2} = T_2 \vec{u_{x2}} = -\vec{T_2}'$

mais ⚠ $T_1 \neq T_2$ à cause de la poulie de masse non nulle

- Th du moment cinétique pour la poulie
  ↳ par rapport à l'axe fixe (Cz)



moment cinétique de la poulie : $\vec{L}_{(Cz)} = -J\omega \vec{u_z}$

force sur la poulie : $\vec{T_1}'$, $\vec{T_2}'$, $\underbrace{M\vec{g}}_{\text{poulie}}$, $\vec{F}_{\text{axe sur la poulie}}$ — appliqués en C centre poulie

th moment cinétique en C fixe dans R

$$\frac{d\vec{L_c}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_c(\text{force sur poulie}) = \vec{CI_1} \wedge \vec{T_1}' + \vec{CI_2} \wedge \vec{T_2}' + \vec{CC} \wedge m\vec{g} + \vec{CC} \wedge \vec{F}_{axe}$$

$$= aT_1 \vec{u_z} - aT_2 \vec{u_z}$$ avec $T_1 = \|\vec{T_1}\|$, $T_2 = \|\vec{T_2}\|$

projection sur (Oz)

$$\frac{d\left(\overbrace{\vec{L_c} \cdot \vec{u_z}}^{=L(Cz)}\right)}{dt} = a(T_1 - T_2)$$

soit $-J\dot{\omega} = a(T_1 - T_2) \Leftrightarrow \underline{\frac{1}{2} M a^{\cancel{2}} \dot{\omega} = \cancel{a}(T_2 - T_1)}$ (4)

en projetant (2) sur axes x_1 et y_1 :

$$\begin{cases} N_1 - m_1 \cos\alpha = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{N_1} = N_1 \vec{u_{y_1}} \\ \quad \hookrightarrow N_1 = m_1 \cos\alpha \quad (5) \\ -m_1 g \sin\alpha + T_1 = m_1 \ddot{x}_1 \quad (6) \end{cases}$$

en projetant (3) sur axes x_2 et y_2 :

$$\begin{cases} N_2 - m_1 \cos\alpha = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 \cos\alpha \quad (7) \\ \quad \text{avec} \quad \vec{N_2} = N_2 \vec{u_{y_2}} \\ g\, m_2 \sin\beta - T_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (8) \end{cases}$$

(6) + (8) : $\quad g m (\sin\beta - \sin\alpha) - (T_2 - T_1) = 2m \ddot{x}_1$

avec $m_1 = m_2 = m$

avec (4) il vient $\quad g m (\sin\beta - \sin\alpha) - \frac{1}{2} M a \dot{\omega} = 2m \ddot{x}_1$

or $a\dot{\omega} = \ddot{x}_1$ (d'après (1)) donc $\ddot{x}_1 \left(2m + \frac{M}{2} a\right) = g m (\sin\beta - \sin\alpha)$

ainsi $\boxed{\ddot{x}_1 = \frac{g m (\sin\beta - \sin\alpha)}{2m + \frac{M}{2} a}} = \ddot{x}_2 = a\dot{\omega}$

Rmq : $\ddot{x}_1 > 0$ car $\beta > \alpha$, les masses se déplacent vers la droite (sur le schéma)

c) Energie cinétique de l'ensemble $\{m_1, m_2, \text{poulie}, \text{corde}\}$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \underbrace{\frac{1}{2} J \omega^2}$$

objet indéformable en rotation autour d'un axe

$$= m \dot{x}_1^2 + \frac{M}{4} \dot{x}_1^2 \quad \text{car } \omega a = \dot{x}_1$$

puissance des forces agissantes sur m_1, m_2 et la poulie :

- $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$ ne travaillent pas car $\perp$ déplacement
- $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ ne travaillent pas car force interne
- $\mathcal{P}(m_1\vec{g}) = m_1\vec{g}\cdot\underbrace{\dot{x}_1\vec{u}_{x1}}_{\vec{v}_1} = -m_1 g(\sin\alpha)\,\dot{x}_1$
- $\mathcal{P}(m_2\vec{g}) = m_2\vec{g}\cdot\vec{v}_2 = m_2\vec{g}\cdot\dot{x}_2\vec{u}_{x2} = m_2 g\sin\beta$

Th de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{\text{forces}})$$

$$\left(m+\frac{M}{4}\right)2\cancel{\dot{x}_1}\,\ddot{x}_1 = +\,m\,g\cancel{\dot{x}_1}(\sin\beta-\sin\alpha)$$

soit $$\boxed{\ddot{x}_1 = \frac{m}{m+M/4}\,g\,(\sin\beta-\sin\alpha)}$$
