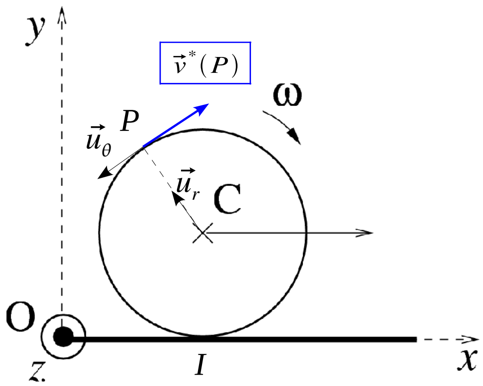
Un cerceau homogène de masse *m*, de rayon *b*, roule sans glisser en ligne droite sur un plan horizontal (O,x,z). Le cerceau reste dans le plan (O;*x;y*). La vitesse $\vec{v}(C)=v_0\vec{u}_x$ de son centre C est constante, $v_0>0$.

1) Calculer le moment d'inertie *J* du cerceau par rapport à son axe (C;*z*).
2) Déterminer la relation entre la vitesse angulaire ω de la roue et v_0. Écrire le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ du cerceau en fonction des données du problème.
3) Soit *P* un point du cerceau. En utilisant la formule de Varignon, écrire la vitesse de *P* dans le référentiel barycentrique de la roue. *[Définir une base bien adaptée pour écrire simplement cette vitesse.]* Tracer cette vitesse sur un schéma.
   En déduire la vitesse de *P* dans le référentiel du sol.
4) Déterminer le moment cinétique $\vec{L}^*$ de la roue dans le référentiel barycentrique et son moment cinétique $\vec{L}_O$ en O dans le référentiel lié au sol.
5) En déduire le moment cinétique $L_{(Oz)}$ du cerceau par rapport à l'axe (O;*z*) dans le référentiel lié au sol.

Correction :



1) Toute la masse est à la distance *b* de l'axe (C;*z*), donc : $J=\int_{P\in Sol} CP^2\,dm(P)=b^2\int_{P\in Sol} dm=b^2 m$.

2) Le vecteur rotation instantané du cerceau est $\vec{\Omega}=-\omega\vec{u}_z$, avec $\omega>0$ (le signe – vient du sens de rotation donné sur le schéma.)

[Pour justifier que $\vec{\Omega}=-\omega\vec{u}_z$: Dans le référentiel barycentrique R le mouvement est une rotation simple autour de l'axe (C;z), fixe dans R*. Donc dans R* : $\vec{\Omega}^*=-\omega\vec{u}_z$; or $\vec{\Omega}=\vec{\Omega}^*$ car R* est en translation par rapport à R.]*

Il n'y a pas de glissement en *I* point de contact entre le cerceau et le sol. Donc le point I_2 du cerceau qui est en contact avec le sol a une vitesse nulle. I_2 et *C* sont fixes dans le référentiel du cerceau, donc d'après la relation de Varignon,

$\vec{v}(C)-\vec{v}(I_2)=\dfrac{d\overrightarrow{I_2C}}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{I_2C}=-\omega\vec{u}_z\wedge b\vec{u}_y=\omega b\vec{u}_x$ or $\vec{v}(C)=v_0\vec{u}_x$ et $\vec{v}(I_2)=\vec{0}$, donc $\boxed{v_0=\omega b}$.

3) *P* et *C* sont fixes dans le référentiel du cerceau donc, $\vec{v}(P)-\vec{v}(C)=\dfrac{d\overrightarrow{CP}}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{CP}$ (*)

Cette formule est valable dans le référentiel R lié au sol et dans le référentiel barycentrique R* car $\vec{\Omega}=\vec{\Omega}^*$.

En coordonnées polaires dans le plan (O;x;y) : $\overrightarrow{CP}=b\vec{u}_r$; *et* dans R* $\vec{v}^*(C)=\vec{0}$ donc

$\boxed{\vec{v}^*(P)=-\omega\vec{u}_z\wedge b\vec{u}_r=-\omega b\vec{u}_\theta}$ (voir $\{\vec{u}_r:\vec{u}_\theta\}$ sur le schéma).

Dans R d'après (*), (ou la formule de changement de référentiel) : $\boxed{\vec{v}(P)=\vec{v}(C)+\vec{v}^*(P)=v_O\vec{u}_x-\omega b\vec{u}_\theta}$.

4) Dans R*, le moment cinétique est :

$$\vec{L}^*=\vec{L}^*_C=\int_{P\in Sol}\overrightarrow{CP}\wedge dm\,\vec{v}^*(P)=-\int_{P\in Sol} dm\,b\vec{u}_r\wedge\omega b\vec{u}_\theta=-b^2\omega\vec{u}_z\int_{P\in Sol} dm=-mb^2\omega\vec{u}_z$$

Remarque, on retrouve bien que $\vec{L}^*.\vec{u}_z=-J\omega$ le signe – provient du sens de rotation.

Le moment dans R en O peut être calculé de la même manière que $\vec{L}^*$ en utilisant la vitesse de *P* dans R, ou bien par la formule de Koening :

$\vec{L}_0=\vec{L}^*+m\overrightarrow{OC}\wedge\vec{v}(C)=-mb^2\omega\vec{u}_z-mbv_0\vec{u}_z$ or $v_0=\omega b$ donc $\boxed{\vec{L}_0=-2mbv_0\vec{u}_z}$

5) Dans R, $\boxed{L_{(Oz)}=\vec{L}_0.u_z=-2mbv_0}$.