NOM : *Prénom :*
Groupe :

Contrôle de mécanique du solide (correction)

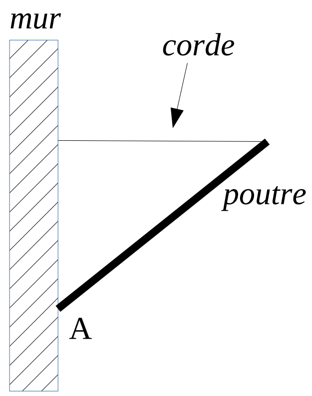
*Toutes les réponses **doivent être justifiées.** Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

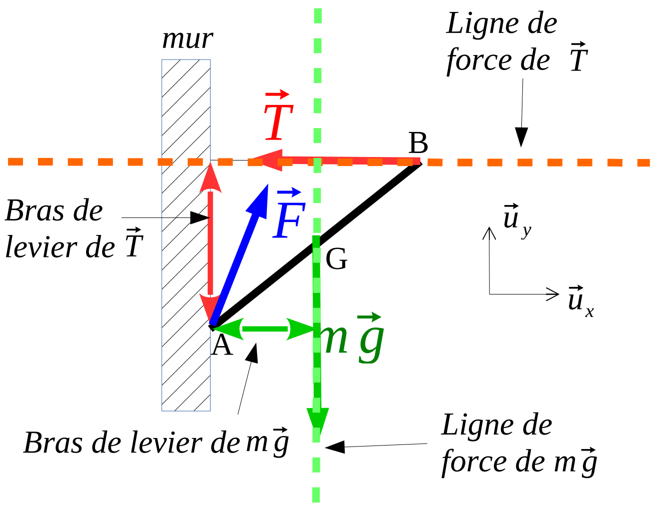
Exercice 1 : statique.

Une poutre de longueur *d* et de masse *m* répartie de façon homogène est en contact sans glisser avec un mur vertical en A (avec un pivot en A) et elle est maintenue par une corde horizontale (voir figure). La poutre fait un angle de 45 degrés avec l'horizontale.
Rappel : La force $\vec{T}$ de la corde sur la poutre est le long de la corde.

a) Tracer les lignes de force de $\vec{T}$ et du poids de la poutre. Indiquer sur le schéma le bras de levier de ces deux forces par rapport au point A.

b) Calculer T et la force du mur sur la poutre.





a) Le point d'application G du poids est le milieu de la poutre (car la poutre est homogène).

Le bras de levier d'une force est la distance entre la ligne de force et le point d'application de cette force.

Bras de levier de la force $\vec{T}$ de la corde sur la poutre (en B) :

$$l_{\vec{T}} = d\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}d \qquad (1)$$

Bras de levier du poids : $l_{m\vec{g}} = \frac{d}{2}\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{4}d$ (2)

Correction :

b) Soit $\vec{F}$ la force du mur sur la poutre (en A).

PFD dans le référentiel du mur galiléen pour la poutre (statique) : $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0$

Par projection verticale et horizontale : $F_x = T$ et $F_y = mg$ (3) avec $\vec{T} = -T\vec{u}_x$

Théorème du moment cinétique (statique) : la somme des moments en A des forces extérieures sur la poutre est nul :

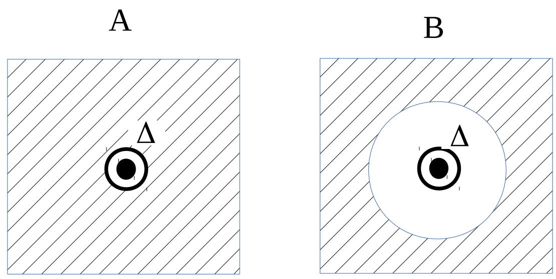
$$\vec{AB} \wedge \vec{T} + \vec{AG} \wedge m\vec{g} + \vec{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$l_{\vec{T}} T - l_{m\vec{g}} mg = 0$$

ainsi, d'après (1) et (2) : $T = \frac{1}{2}mg$. Donc $\boxed{\vec{T} = -\frac{1}{2}mg\vec{u}_x}$ et d'après (3) : $\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}mg\vec{u}_x + mg\vec{u}_y}$.

Exercice 2 : **Moment d'inertie**

a) Soient deux carrés A et B de même côté *a* et de même masse *m* répartie uniformément (de façon homogène). Le carré A est plein et le carré B à un trou circulaire en son centre (voir figure). Comparez <u>sans calcul</u>, mais en justifiant votre réponse, leurs moments d'inertie par rapport à l'axe Δ perpendiculaire aux carrés passant par leur centre O.



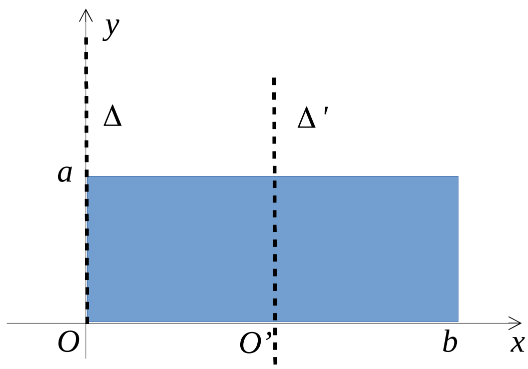
<u>Correction :</u>

Par définition, le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ est $J=\int_{P\in Solide} HP^2 dm(P)$ où H est la projection orthogonale de P sur l'axe Δ .

Dans les cas A et B la masse totale est la même, mais dans le cas B la masse est (en moyenne) plus éloignée de l'axe que dans le cas A, donc $\boxed{J_{cas\,B}>J_{cas\,A}}$.

b) Soit un rectangle de masse *m* répartie de façon homogène, de côtés *a* et *b*. Soit un axe Δ passant par un côté *a* et un axe Δ' parallèle à Δ passant par le centre du rectangle.

Calculer les moments d'inertie *J* et *J'* par rapport aux axes Δ et Δ'.



<u>Correction :</u> en coordonnées cartésiennes $dm(P)=\sigma\, dx\, dy$, avec la masse surfacique $\sigma=m/(ab)$ car la distribution de masse de la plaque est homogène.

Avec le repère (O,*x*,*y*) (voir figure) : $HP = x$, donc :

$$J=\int_{P\in Solide} HP^2 dm(P)=\iint_{P(x,y)\in Solid} x^2 \sigma\, dx\, dy=\sigma\int_{y=0}^{a} dy\int_{x=0}^{b} x^2 dx=\sigma\, a\frac{1}{3}[x^3]_0^b=\sigma\, a\frac{1}{3}b^3=\frac{1}{3}m b^2$$

Remarque : J ne dépend pas de a, car la répartition de la masse dans la direction du côté a ne change par l'éloignement de la masse avec l'axe Δ *. On retrouve donc le même résultat que pour le J d'une barre par rapport à un axe perpendiculaire à la barre passant par bout de la barre.*

Pour calculer *J'*, moment par rapport à l'axe Δ' , on peut considérer le repère (O',x,y). Dans ce cas, on a toujours $HP = x$, mais x varie de $-b/2$ à $+b/2$, donc :

$$J'=\int_{P\in Solide} HP^2 dm(P)=\iint_{P(x,y)\in Solid} x^2 \sigma\, dx\, dy=\sigma\int_{y=0}^{a} dy\int_{x=-b/2}^{b/2} x^2 dx=\sigma\, a\frac{1}{3}[x^3]_{-b/2}^{b/2}=\sigma\, a\frac{1}{12}b^3=\frac{1}{12}m b^2$$

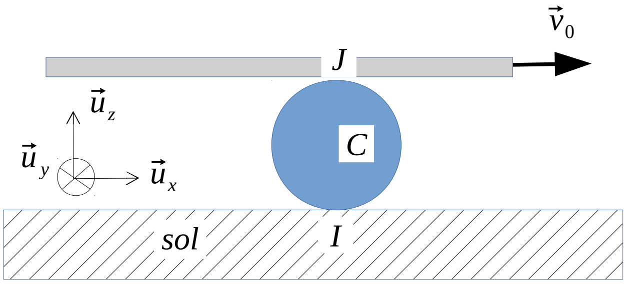
Remarque : on vérifie facilement le théorème de Huygens que $J=J'+m\left(\frac{b}{2}\right)^2$ *, car le centre de gravité de la plaque passe par* Δ' *.*

Exercice 3 :

Soit une bille, de rayon *b*, placée entre le sol (horizontal) et une plaque horizontale se déplaçant à vitesse constante $\vec{v}_0$.

Les contacts sol/bille et bille/plaque sont sans glissement.

Calculer la vitesse angulaire ω de la bille et la vitesse de son centre C.



Correction :

Soient *I* et *J* les points de contact de la roue avec le sol et la plaque, respectivement. Il n'y a pas de glissement en *I* donc $\vec{v}(I)=\vec{v}_{sol}=\vec{0}$, ni en *J* donc $\vec{v}(J)=\vec{v}_{plaque}=\vec{v}_0$.

Le vecteur rotation instantané de la roue est $\vec{\Omega}=\omega\vec{u}_y$ (avec $\omega>0$ si la roue se déplace de gauche vers la droite sur la figure).

Théorème de Varignon pour les points *I* et *J* de la roue : $\frac{d\vec{IJ}}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\vec{IJ}$

donc $\vec{v}(J)-\vec{v}(I)=\vec{\Omega}\wedge\vec{IJ}$

$\vec{v}_0-\vec{0}=\omega 2b\vec{u}_y\wedge\vec{u}_z=2\omega b\vec{u}_x$

donc $\vec{v}_0=2\omega b\vec{u}_x$ et la vitesse angulaire de la roue est $\boxed{\omega=\frac{v_0}{2b}}$.

En appliquant le théorème de Varignon entre I et C on obtient : $\frac{d\vec{IC}}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\vec{IC}$,

soit $\vec{v}(C)-\vec{v}(I)=\vec{\Omega}\wedge\vec{IC}$

$\vec{v}(C)-\vec{0}=\omega b\vec{u}_y\wedge\vec{u}_z=\omega b\vec{u}_x=\frac{1}{2}v_0\vec{u}_x$

donc $\boxed{\vec{v}(C)=\frac{1}{2}v_0\vec{u}_x}$.