Université de Cergy-Pontoise 21 octobre 2013
L2S3 – P, prépa-MP et prépa-PC

NOM : Prénom :

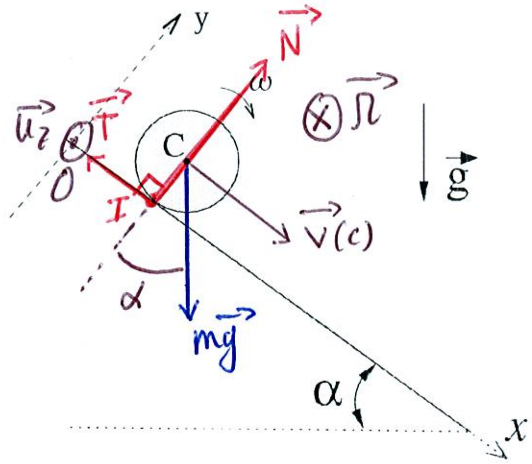
Groupe :

Quiz n° 2 de mécanique du solide

Corrigé

Une roue, homogène, de masse *m*, de rayon *b*, roule sans glisser sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. On suppose que la roue reste dans le plan vertical (plan de la figure). Les coefficients de frottement statique et dynamique entre une roue et ce plan sont supposés égaux : $f = f_s = f_d$. Le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de symétrie (axe perpendiculaire à la roue passant par son centre) est $J = mb^2/2$.

1) Quelles sont les forces sur la roue et leurs points d'application ?
2) Établir le lien entre la vitesse $v(C)$ du centre *C* de la roue et la vitesse angulaire ω de la roue.
3) Appliquer le principe fondamental de la dynamique.
4) Appliquer le théorème du moment cinétique.
5) En déduire l'accélération du centre *C* de la roue.



1/ Forces sur la roue :

- poids $m\vec{g}$ pt d'application C (centre de masse)
- force du sol sur la roue : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ pt d'application I

$\vec{T}$ frottement statique car pas de glissement $\|\vec{T}\| \leq f\,\|\vec{N}\|$

$m\vec{g} = mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y}$

$\vec{T} = -T\vec{u_x}$ et $\vec{N} = N\vec{u_y}$

2) en I pas de glissement donc $\vec{v}(\underset{\uparrow}{I}) = \vec{0}$, de plus I et C sont pt du solide

donc d'après Varignon : $\vec{v}(C) - \vec{v}(I) = \frac{d}{dt}\vec{IC} = \vec{\Omega} \wedge \vec{IC} = -b\omega\,\vec{u_z} \wedge \vec{u_y}$

avec $\vec{IC} = b\,\vec{u_y}$ et $\vec{\Omega} = -\omega\,\vec{u_z}$ (d'après le sens de ω sur le schéma)

donc $\underline{\underline{\vec{v}(C) = b\omega\,\vec{u_x}}}$

3) PFD dans le réf du sol galiléen : $m\vec{a}(C) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$

projection sur (Ox) : $m\dot{v}(C) = mg\sin\alpha - T$ sur (Oy) : $N - mg\cos\alpha = 0$ $\Rightarrow N = mg\cos\alpha$

4) Dans le réf. barycentrique $\frac{dL(z)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_C(\text{force})\cdot\vec{u_z}$

or dans R^* le mvt de la roue est une rotation autour de l'axe fixe (Cz)

donc $L_{(Cz)} = - J_{(Cz)}\, \omega$ avec $J_{(Cz)} = \frac{1}{2} m b^2$

ainsi $- J_{(Cz)}\, \dot{\omega} = \underbrace{(\overrightarrow{CC} \wedge m\vec{g})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{u_z} + \underbrace{(\overrightarrow{CI} \wedge \vec{N})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{u_z} + (\overrightarrow{CI} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{u_z}$

$= - b\, \vec{u_y} \wedge (-T)\, \vec{u_x} \cdot \vec{u_z}$

$= - bT$

donc $T = \frac{J}{b} \dot{\omega} = \frac{1}{2} m b \dot{\omega}$

5) D'après la projection du PFD sur (Ox)

$$m\, \dot{v}(C) = mg \sin\alpha - \frac{1}{2} m b \dot{\omega}$$

D'après 2) : $v(C) = b\omega$ donc $\dot{v}(C) = b\dot{\omega}$ (en dérivant)

ainsi $m\, \dot{v}(C) = mg \sin\alpha - \frac{1}{2} m\, \dot{v}(C)$

soit $\dot{v}(C) = \frac{2}{3} g \sin\alpha$ ainsi $\vec{a}(C) = \frac{2}{3} g \sin\alpha\, \vec{u_x}$

l'accélération est constante, le mvt est uniformément accéléré

Rmq : On suppose qu'il n'y a pas de glissement en I

Cela n'est possible que si le frottement est statique

c'est à dire si $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$

d'après 4) $T = \frac{1}{2} m b \dot{\omega} \overset{2)}{=} \frac{1}{2} m\, \dot{v}(C) \overset{5)}{=} \frac{1}{3} mg \sin\alpha > 0$

d'après la projection du PFD sur (Oy) : $N = mg\cos\alpha$

donc la condition de non-glissement s'écrit : $\frac{1}{3} mg \sin\alpha \leq f\, mg\cos\alpha$

soit $\tan\alpha \leq 3f$

Donc si $\tan\alpha > 3f$ il y a forcément glissement.