Université de Cergy-Pontoise
L2S3 – P, prépa-MP et prépa-PC

1 octobre 2012

Quiz de mécanique du solide : corrigé

1) <u>Cours :</u> Démontrer que dans le référentiel barycentrique le moment cinétique en A d'un solide indéformable ne dépend pas de A.

Soit A et A' deux points. Considérons un solide composé de masse volumique. Dans (R^*),

$$\vec{L}^*_A = \iiint_{P\in Solide} dm\, \vec{AP}\wedge\vec{v}^*(P) = \iiint_P dm\, \vec{AA'}\wedge\vec{v}^*(P) + \vec{L}^*_{A'} = \vec{L}^*_{A'} + \vec{AA'}\wedge\iiint_P dm\, \vec{v}^*(P)$$

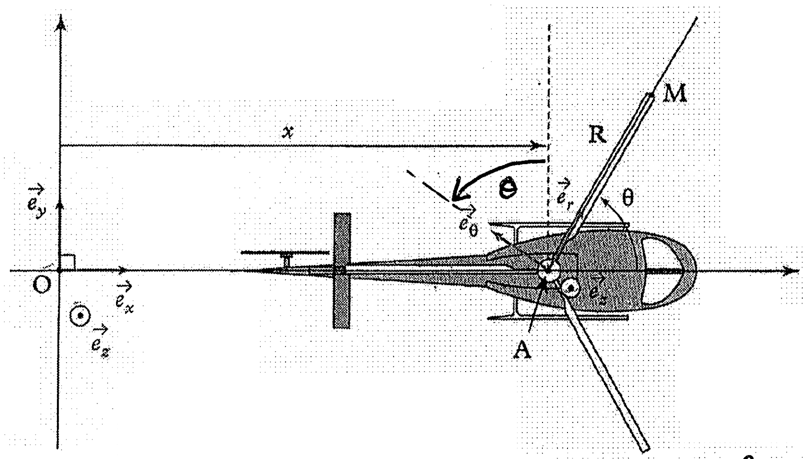
or par définition de G (centre de masse): $\iiint_P dm\, \vec{v}^*(P) = m\,\vec{v}^*(G) = \vec{0}$ car G fixe dans R^*

$$\Rightarrow \underline{\vec{L}^*_A = \vec{L}_{A'}}$$

2) On considère un hélicoptère (figure ci-dessous) se déplaçant à vitesse constante $\vec{v}=v\vec{e}_x$ le long de l'axe $(O;\vec{e}_x)$ fixe dans le référentiel $R(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. Les 3 pales de l'hélice ont une longueur R et tournent à la vitesse angulaire constante $\omega=d\theta/dt$.

a) En utilisant la formule de Varignon, exprimer dans la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ la vitesse du point M situé à l'extrémité d'une pâle (voir figure).

b) En déduire l'accélération de M.



$\vec{AM} = R\,\vec{e}_r$

Dans R : $\vec{V}(A) = V\vec{e}_x$

$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$

$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$

2) Dans le référentiel $R'(A;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ la pâle contenant les points A et M tourne à vitesse angulaire ω ; son vecteur vitesse instantané est $\vec{\Omega}' = \omega\vec{e}_z$.
R' est en translation par rapport à R donc dans R : $\underbrace{\vec{\Omega}}_{\text{de la pâle}} = \vec{\Omega}' + \underbrace{\vec{\Omega}_{R'/R}}_{\vec{0}} = \vec{\Omega}' = \omega\vec{e}_z$

a) A et M sont 2 points de la pâle (solide indéformable) donc d'après Varignon :

dans R $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{AM}}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{AM} \iff \vec{v}(M) - \vec{V}(A) = \omega R\,\vec{e}_z\wedge\vec{u}_r = \omega R\,\vec{e}_\theta$

or $\vec{e}_\theta = +\cos\theta\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_x$

ainsi dans R : $\vec{v}(M) = V\vec{e}_x + \omega R\,\vec{e}_\theta$

Donc $\vec{v}(M) = (V - \omega R\sin\theta)\,\vec{e}_x + \omega R\cos\theta\,\vec{e}_y$

avec $\dot{\theta} = \omega$ donc $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ avec θ_0 une constante qui dépend des conditions initiales

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}(M) = [V - \omega R\sin(\omega t+\theta_0)]\,\vec{e}_x + \omega R\cos(\omega t+\theta_0)\,\vec{e}_y}}$$

b) et $\vec{a}(M) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \underline{\underline{-\omega^2 R\cos(\omega t+\theta_0)\,\vec{e}_x - \omega^2 R\sin(\omega t+\theta_0)\,\vec{e}_y}}$