# Contrôle de mécanique du solide - Corrigé

*Toutes les réponses **doivent être justifiées***

**Exercice 1 :**

Calculer le moment d'inertie d'un disque plein rayon $a$, homogène de masse $m$, par rapport à l'axe $\Delta$ perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre O.

Correction : En considérant une masse surfacique $\sigma$ uniforme : $m=\pi a^2 \sigma$ .

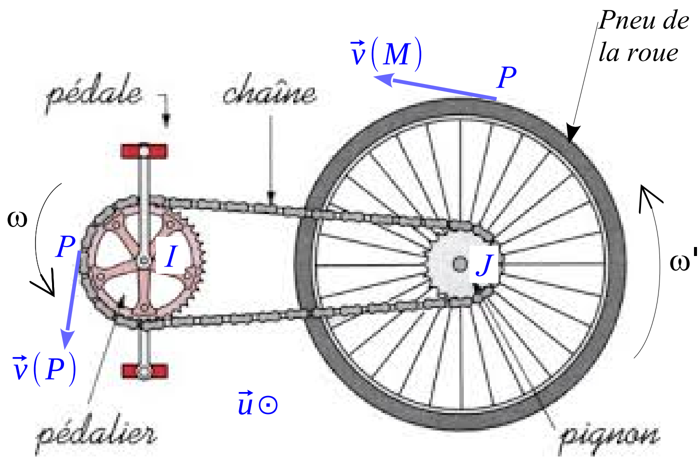
En coordonnées cylindriques, avec $\Delta$ l'axe Oz, pour tout point $P(r,\theta,z)$ du disque, la distance de $P$ à $\Delta$ est $r$. Dans le plan (O$xy$) l'élément de surface cylindrique est d$S$ = d$r$ $r$d$\theta$. Donc par définition du moment d'inertie par rapport à $\Delta$ :

$$J_\Delta = \iint_{P\in disque} r^2 \sigma\, dS = \sigma \iint_{P\in disque} r^2\, dr\, r\, d\theta = \sigma \int_{r=0}^{a} r^3\, dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{1}{4}\sigma a^4 2\pi = \frac{1}{2} m a^2 \qquad (1)$$

**Exercice 2 :**

Le pédalier d'un vélo (voir figure) tourne à la vitesse angulaire $\omega$ . Soit $a$ le rayon du pédalier, $b$ le rayon du pignon et $c$ le rayon de la roue. Dans le référentiel du vélo, déterminer la norme de la vitesse $v$ d'un point du pneu de la roue (point au bord de la roue).

Application numérique : $\omega$=0.5 tour/s, $a$ = 20 cm, $b$ = 10 cm et $c$ = 50 cm. Calculer $v$ en m/s.




Correction : Soit $I$ le centre du pédalier et $J$ le centre de la roue (et du pignon). Dans le référentiel du vélo $I$ et $J$ sont fixes. Tous les points de la chaîne sont la même vitesse $v_C$ (en norme), de plus la chaîne ne glisse pas sur le pédalier ni sur le pignon. Soient $\omega'$ la vitesse angulaire du la roue (et du pignon).

Soit $\vec{\Omega}=\omega \vec{u}$ et $\vec{\Omega}'=\omega' \vec{u}$ les vecteurs rotations instantanés du pédalier et de la roue.

Soit $P$ un point de la chaîne en contact avec le pédalier, d'après Varignon, dans le référentiel du vélo :

$$\vec{v}(P)-\vec{v}(I)=\vec{\Omega}\wedge\vec{IP} \qquad (2)$$

car $P$ et $I$ sont fixes par rapport au pédalier. Or $\vec{v}(I)=\vec{0}$ , $\|\vec{v}(P)\|=v_c$ et $\vec{\Omega}\perp\vec{IP}$ , donc d'après (2) :

$$v_c = \omega a \qquad (3)$$

De même en considérant $P$' un point de la chaîne en contact avec le pignon, on obtient :

$$v_c = \omega' b \qquad (4)$$

$$\text{et donc} \qquad \omega' = \frac{a}{b}\omega \qquad (5)$$

Soit $M$ un point du pneu de la roue, d'après Varignon : $\vec{v}(M)-\vec{v}(J)=\vec{\Omega}'\wedge\vec{JM}$. Sachant que $\vec{v}(J)=\vec{0}$, $\|\vec{v}(M)\|=v$, $JM=c$ et $\vec{\Omega}'\perp\vec{JM}$, on en déduit que $v = \omega' c$ et d'après (5) : $\boxed{v = \frac{ac}{b}\omega}$. Le vecteur $\vec{v}(M)$ est tracé sur la figure.

Application numérique : $\boxed{v = \frac{ac}{b}\omega = \frac{20}{10}0.5\times 2\pi\times 0.5 = \pi\,\text{m/s} = 3.14\,\text{m/s}}$

Attention la vitesse angulaire doit être donnée en radian par seconde : $\omega = 0.5\,\text{tour/s} = 0.5\times 2\pi\,\text{rd/s}$.

**Exercice 3 :**

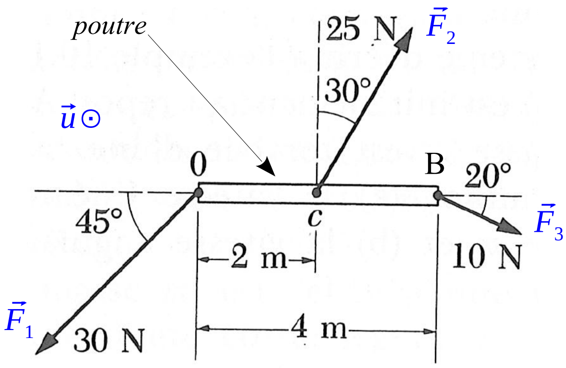
La somme des moments des forces est-elle toujours nulle lorsque la somme des forces est nulle ?

Correction : Non. Par exemple un couple de force est par définition un ensemble de force dont la résultante est nulle mais tel que la somme des moments des forces est non nulle (voir cours).

**Exercice 4 :**

Calculer la dérivée temporelle du moment cinétique en O de la poutre de la figure lorsqu'elle subit les 3 forces indiquées sur la figure. Les amplitudes de ces forces sont écrites sur la figure en Newton.

Application numérique : Vous pouvez donner une expression numérique sans faire les calculs.




Correction : D'après le théorème du moment cinétique, la dérivée temporelle du moment cinétique de la poutre en O, $\vec{L}_O$, est la somme des moments des forces appliquée sur la poutre.

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OO}\wedge\vec{F}_1 + \vec{OC}\wedge\vec{F}_2 + \vec{OB}\wedge\vec{F}_3$, voir figure pour la signification des indices.

Ainsi $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} + OC\,F_2\cos(30°)\vec{u} - OB\,F_3\sin(20°)\vec{u}$, le sens de $\vec{u}$ est défini sur la figure.

Donc, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = (2\times 25\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\times 10\sin(20°))\vec{u}=29{,}6\vec{u}\ \text{kg m}^2\,\text{s}^{-2}$.

**Exercice 5 :**

On fait tourner un cerceau à la vitesse angulaire $\omega$ autour de l'axe $\Delta$ perpendiculaire au plan du cerceau. Comparer les énergies cinétiques du cerceau lorsque $\Delta$ passe par le centre du cerceau et lorsque $\Delta$ passe par un point au bord du cerceau.

Correction : Soit $\Delta$ l'axe passant par le centre du cerceau et $\Delta'$ l'axe passant par un point du bord du cerceau, $\Delta$.et $\Delta'$ sont parallèles. L'axe $\Delta$ contient le centre de gravité du cerceau. D'après le théorème de Huygens : $J_{\Delta'} = J_{\Delta'} + m\left(\frac{R}{2}\right)^2$, où R est le rayon du cerceau (R/2 est la distance $\Delta$–$\Delta'$). Donc $J_{\Delta'} > J_{\Delta'}$, or le moment cinétique d'un solide en rotation autour de axe fixe est $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta}\omega$, où $\omega$ est la vitesse angulaire. Donc L'énergie cinétique est plus grande <u>lorsque le cerceau tourne autour de $\Delta'$</u>.

**Exercice 6 :** (en plus du barème)

Pour exécuter un saut périlleux dans les airs, une plongeuse ramène ses genoux sur sa poitrine. Expliquer pourquoi ce geste augmente sa vitesse de rotation ? Que doit-elle faire pour cesser de tourner ?

Correction : Soit R un référentiel lié au sol (galiléen), soit R* le référentiel barycentrique de la plongeuse dans R. Dans R*, le mouvement de la plongeuse est une rotation autour d'un axe fixe, passant par son centre de gravité G. Le théorème du moment cinétique barycentrique (dans R*) s'écrit $\frac{d}{dt}\vec{L}^* = \vec{0}$, car la seule force sur la plongeuse est son poids qui s'applique en *G* (et donc le moment du poids en *G* est nul). Le moment cinétique de la plongeuse est donc conservé : $\vec{L}^* = \overrightarrow{Cte}$. Le moment cinétique projeté sur l'axe de rotation de la plongeuse $\Delta$ est donc lui aussi conservé : $L_{\Delta}^* = Cte$, Or $L_{\Delta}^* = J_{\Delta}\omega$, où $\omega$ est la vitesse angulaire de rotation de la plongeuse.

Lorsque la plongeuse se replie sur elle même, sa masse se rapproche de l'axe $\Delta$ donc $J_{\Delta}$ diminue. Or $J_{\Delta}\omega$ doit rester constant, il faut donc que la vitesse angulaire de rotation $\omega$ augmente.

De même pour ralentir sa vitesse de rotation, il suffit qu'elle se déplie, pour qu'une partie de sa masse s'éloigne de l'axe $\Delta$ afin que $J_{\Delta}$ augmente et donc que $\omega$ diminue.

* * *