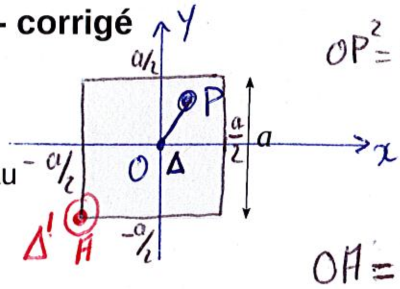
Contrôle de mécanique du solide - corrigé

Exercice 1 :

a) Calculer le moment d'inertie d'une plaque carré de côté *a*, homogène de masse *M*, par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au plan de la plaque et passant par son centre O.



$OP^2 = x^2 + y^2$

$OA = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}$

$$m = \iint \sigma \, dS \overset{\text{uniforme}}{=} \sigma \iint dS = \sigma a^2$$

$$J_\Delta = \iint_S \sigma \, dS \, OP^2 = \iint_S \sigma \, dx\,dy \, x^2 + \iint_S \sigma \, dx\,dy \, y^2$$

$$\text{or } \iint_S x^2 dx\,dy = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-a/2}^{a/2} dy = \frac{a^4}{12} \quad \text{et de même } \iint y^2 dx\,dy = \frac{a^4}{12}$$

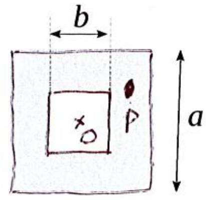
$$\text{donc } J_\Delta = \frac{\sigma a^4}{6} = \boxed{\frac{1}{6} m a^2}$$

b) En déduire le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe Δ' parallèle à Δ et passant par un des coins du la plaque

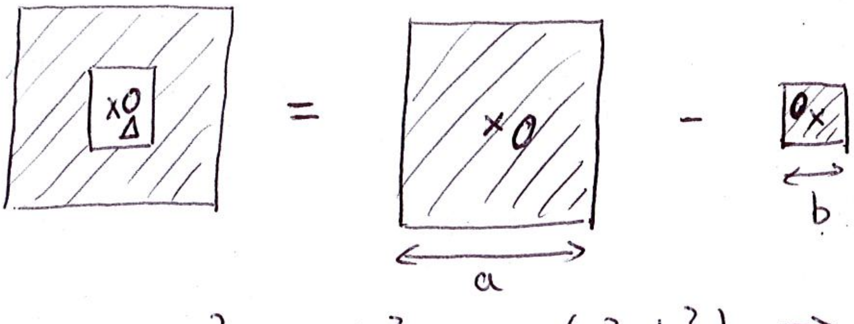
Th de Huygens car $G \equiv O \in \Delta$: $J_{\Delta'} = J_\Delta + m\, OA^2$ avec Δ' passant par A

$$J_{\Delta'} = \frac{1}{6} m a^2 + m \frac{a^2}{2} = \boxed{\frac{2}{3} m a^2}$$

c) La plaque, carré de côté *a*, est percée d'un trou carré de même centre 0 et de côté *b* ($b < a$). Calculer le moment d'inertie de cette plaque percée de masse *m* par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au plan de la plaque et passant par son centre O



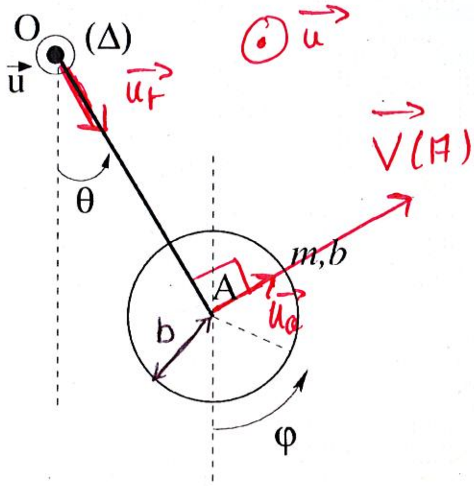
Rmq :



$$\text{donc} \quad m = \sigma a^2 - \sigma b^2 = \sigma(a^2 - b^2) \Rightarrow \sigma = m/(a^2-b^2)$$

$$\text{et} \quad J_\Delta = \iint_S \sigma \, dS \, OP^2 = \iint_{\substack{\text{carré de}\\ \text{côté } a}} \sigma \, dS \, OP^2 - \iint_{\substack{\text{carré de}\\ \text{côté } b}} \sigma \, dS \, OP^2$$

$$J_\Delta = \frac{\sigma}{6}(a^4 - b^4) = \frac{m}{6}\frac{(a^4-b^4)}{(a^2-b^2)} = \boxed{\frac{m}{6}(a^2+b^2)}$$



Exercice 2 :

Soit un mobile composé :

- d'une barre OA, de longueur L, de masse négligeable, pouvant tourner autour d'un axe Δ fixe en O
- d'une roue de masse *m*, pouvant tourner autour d'un axe Δ' fixé à la barre en A. Δ' passe par le centre de la roue (au point A). Δ' est parallèle à Δ. Le moment d'inertie de la roue par rapport à Δ' est $J = mb^2/2$.

Tous les mouvements du mobile sont dans le plan de la figure. Des moteurs (de masse négligeable) imposent les vitesses de rotation suivantes dans le référentiel (R) lié au sol :

- la barre tourne autour de Δ à la vitesse angulaire constante positive $\omega_b = \dot\theta$,
- la roue tourne à la vitesse angulaire $\omega_r = \dot\varphi = at$, avec *a* une constante positive et *t* le temps.

En fonction de *m*, *L*, ω_b, ω_r, *a* et *t* :

a) Dans le référentiel (R), écrire le vecteur instantané de rotation de la barre et le vecteur instantané de rotation roue.

$$\begin{cases} \vec\Omega_b = \vec\Omega(\text{barre}) = \dot\theta\,\vec u \\ \text{dans } R \qquad\qquad = \omega_b\,\vec u \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec\Omega_r = \vec\Omega(\text{roue}) = \dot\varphi\,\vec u = a t\,\vec u \\ \text{dans } R \end{cases}$$

b) Justifié que le moment cinétique de la roue dans son référentiel barycentrique est perpendiculaire au plan de la figure.

Les vitesses de tous les points sont dans le plan de la figure, et O ∈ ce plan

donc ∀P ∈ solide $\quad \underbrace{dm\,\vec{OP}\wedge\vec V(P)}_{/\!/\,\vec u} \perp$ plan de la figure $\Rightarrow \underline{\vec L_O = \int dm\,\vec{OP}\wedge\vec V(P) \,/\!/\, \vec u}$

c) Déterminer le moment cinétique de la roue dans son référentiel barycentrique.

$$\vec L^*_{(\text{roue})} = L^*\,\vec u \text{ d'après b) donc } L^* = \vec L^*\cdot\vec u = L^*_{(O,\vec u)\,\text{roue}} \underbrace{= +J\dot\varphi}_{\text{rotation autour axe fixe dans }(R^*)}$$

$$\text{donc } \boxed{\vec L^*_{\text{roue}} = \frac12 m b^2\dot\varphi\,\vec u = \frac m2 b^2 a t\,\vec u}$$

d) Déterminer l'énergie cinétique barycentrique de la roue.

$$E_c^*(\text{roue}) = \frac12 J\dot\varphi^2 \quad \text{rotation autour axe fixe dans } (R^*)$$

$$= \frac14 m b^2\dot\varphi^2 = \frac14 m b^2 a^2 t^2$$

e) En utilisant le théorème de Koëning, que vous énoncerez clairement, déterminer dans le référentiel (R), le moment cinétique de la roue en 0.

$$\text{Koënig : } \vec L_O(\text{roue}) = \vec L^*_{\text{roue}} + \vec{OA}\wedge\vec V(A)\,m \quad \text{car } A \equiv G(\text{roue})$$

$$\text{avec } \vec V(A) = L\dot\theta\,\vec{u_\theta} \quad \text{donc } \begin{cases}\vec L_O(\text{roue}) = \frac12 m b^2\dot\varphi\,\vec u + mL^2\dot\theta\,\vec u = m\left(\frac{b^2}{2}at + L^2\omega_b\right)\vec u \\ \text{dans } (R)\end{cases}$$

f) En utilisant le théorème de Koëning, que vous énoncerez clairement, déterminer dans le référentiel (R), l'énergie cinétique.

$$\text{Koënig : } E_c(\text{roue}) = E_c^*(\text{roue}) + \frac12 m V(A)^2 = \frac14 m b^2\dot\varphi^2 + \frac12 m L^2\dot\theta^2$$

$$E_c(\text{roue}) = \frac12 m\left(\frac{b^2}{2}a^2t^2 + L^2\omega_b^2\right) \quad (\text{dans } (R))$$