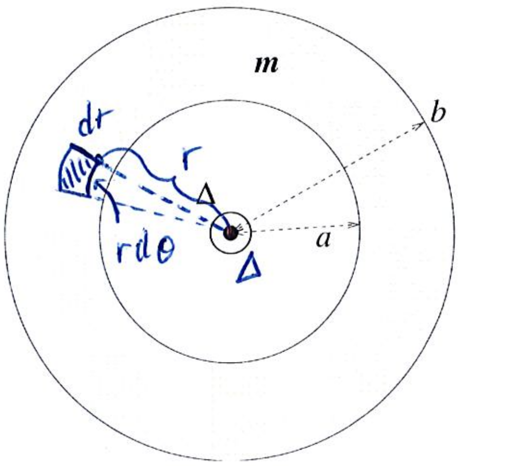
Contrôle de mécanique du solide Corrigé

Exercice 1 :

Calculer le moment d'inertie d'une bague circulaire homogène de masse *m*, de rayon intérieur *a* et de rayon extérieur *b*, par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au plan de la bague et passant par son centre O.



$$I_\Delta = \int dm\, r^2$$ car r = distance de dm à l'axe Δ

avec $dm = \sigma\, dS = \sigma\, dr\, r\, d\theta$

$$I_\Delta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \sigma r^2\, r\, dr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4}\right]_a^b = \frac{\pi\sigma}{2}(b^4 - a^4)$$

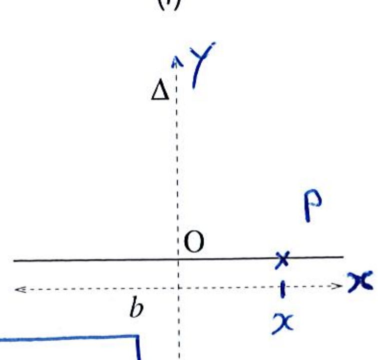
or $m = \sigma\pi b^2 - \sigma\pi a^2 = \sigma\pi(b^2 - a^2)$ donc $I_\Delta = \frac{m}{2}\frac{b^4 - a^4}{b^2 - a^2} = \frac{m}{2}(b^2 + a^2)$

car $b^4 - a^4 = (b^2 - a^2)(b^2 + a^2)$

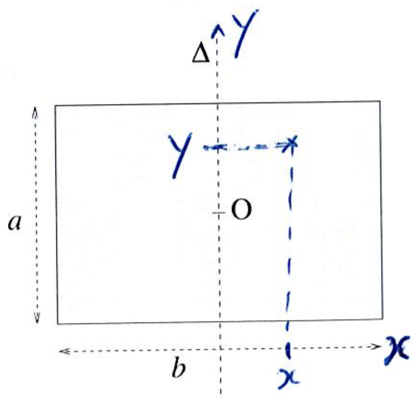
Exercice 2 :

Comparer (sans calcul) les moments d'inertie par rapport à l'axe Δ (voir schéma) : (*i*) d'une barre homogène masse *m*, et de longueur b, et (*ii*) d'une plaque homogène de masse m et de côté a et b (voir schéma). Justifiez brièvement votre réponse.

(*i*)



(*ii*)



$$\boxed{I_{\Delta}(i) = I_{\Delta}(ii)}$$

car ∀ P où il y a de la masse : $P(x,y)$, la distance de P à l'axe $\Delta = (Oy)$ est x. Elle ne dépend pas de y, donc I_Δ ne dépend pas de la répartition de la masse suivant y, donc I_Δ ne dépend pas de a.

Exercice 3 :

a) Question de cours : énoncer (sans le démontrer) le théorème de Koënig pour l'énergie cinétique (relation qui relie l'énergie cinétique d'un solide indéformable (rigide) dans le référentiel R avec son énergie cinétique dans le référentiel barycentrique R*)

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m \|\vec{v}(G)\|^2$$ avec G centre de masse et $\omega = \|\vec{\Omega}\|$

Energie cinétique barycentrique : $E_c^* = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$

b) Une roue, homogène de masse *m* et de rayon *b*, roule **sans glisser** le long de axe (O*x*) à vitesse angulaire constante ω . La roue se déplace dans le sens des *x* croissants (voir schéma).

b.1) Quel est vecteur instantané de rotation ? Le représenter le sur schéma.

$\vec{\Omega} = -|\omega| \vec{u_z}$ avec $|\omega| = \|\vec{\Omega}\|$ vitesse angulaire

Rmq : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^*$

b.2) Placer sur le schéma l'axe instantané de rotation dans le référentiel du sol R (0,*x*,*y*,*z*) et l'axe instantané de rotation dans le référentiel barycentrique R* de la roue.

Dans R*, la roue tourne autour de l'axe (Cz) = axe instantané de rotation (Δ^*)

Dans R, à chaque instant, la roue tourne autour de (Iz) avec I point contact roue/sol car $\underset{\in \text{roue}}{\vec{v}(I)} = \vec{0}$ (pas glissement)

b.3) Déterminer la vitesse du centre C de la roue en fonction de ω et *b*.

Varignon $\vec{V}(C) - \underset{\in \text{roue}}{\vec{V}(I)} = \vec{\Omega} \wedge \vec{IC}$ or $\vec{V}(I) = \vec{0}$ pas de glissement

donc $\vec{V}(C) = \vec{0} - |\omega| \vec{u_z} \wedge b \vec{u_y} = \underline{\underline{|\omega| b \vec{u_x}}}$

b.4) Déterminer l'énergie cinétique barycentrique R* de la roue en fonction de *m*, *b* et ω .

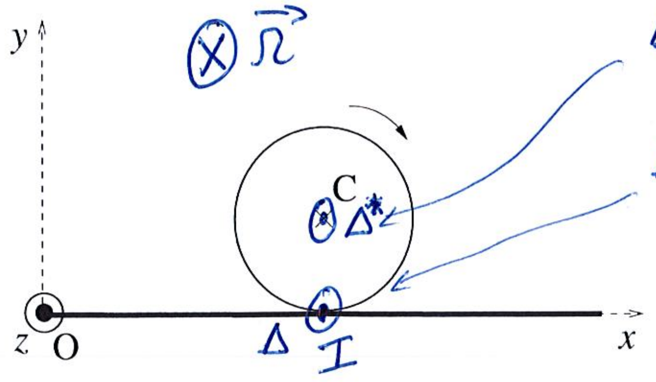
dans R*, la roue tourne autour de l'axe fixe $\Delta^* = (Cz)$

$E_c^* = \frac{1}{2} J_{\Delta^*} \omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} m b^2 \omega^2}}$ car $J_{\Delta^*} = \frac{1}{2} m b^2$

b.5) Déterminer l'énergie cinétique de la roue dans le référentiel du sol R en fonction de *m*, *b* et ω .

Koënig : $\left\{ \underset{\text{dans R}}{E_c} = E_c^* + \frac{1}{2} m V(C)^2 = \underline{\underline{\frac{3}{4} m b^2 \omega^2}} \right.$

C ≡ G centre de masse de la roue



Δ* axe instantané de rotation dans R*

Δ " " dans R