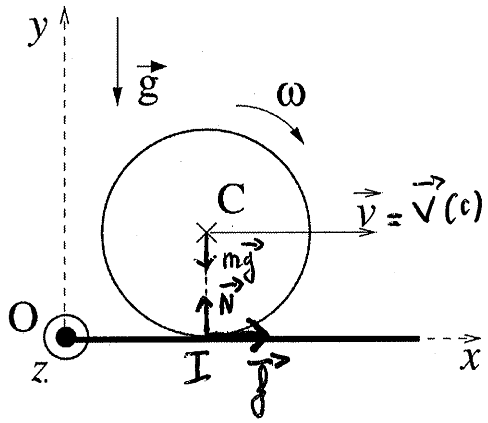
Université de Cergy-Pontoise
L2S3 – P, prépa-MP et prépa-PC

15 octobre 2012

Quiz de mécanique du solide

Une roue homogène de masse m, de rayon b, est entraînée par un moteur qui produit sur son axe un couple de force de moment $\vec{\Gamma} = -\Gamma \vec{u}_z$, avec Γ une constante positive. On négligera le poids du moteur. La roue se déplace sans glisser sur un plan horizontal le long de l'axe (0x). La roue reste dans le plan (O,x,y). Soit μ le coefficient de frottement statique entre la roue et le sol.

1) On suppose que la masse de la roue est répartie uniquement sur le périmètre de la roue. Calculer le moment d'inertie J de la roue par rapport à son axe.
2) Déterminer la relation entre la vitesse angulaire ω de la roue et la vitesse de son centre C.
3) En plus de l'action du moteur, quelles sont les forces qui agissent sur la roue ?
4) Écrire le principe fondamental de la dynamique (théorème de la résultante cinétique).
5) Écrire le théorème du moment cinétique.
6) En déduire l'accélération du centre C de la roue et la force de frottement du sol sur la roue. Tracer cette force sur un schéma (pour $\Gamma > 0$). Que vaut-elle lorsque $\Gamma = 0$?



a) Axe de la roue $\Delta = (Cz)$

$$I_\Delta = \int_{P \in roue} dm\, CP^2 \quad \text{(masse linéique)}$$

$$= \int dm\, b^2 = b^2 \int dm = \underline{\underline{b^2 m}}$$

b) Soit I_2 le point de la roue en I à l'instant t.

Varignon : $\dfrac{d\vec{I_2C}}{dt} = \vec{v}(c) - \vec{v}(I_2) = \vec{\Omega} \wedge \vec{I_2C}$

avec $\vec{\Omega} = -\omega \vec{u_z}$ (avec $\omega > 0$ comme indiqué sur la figure) donc $\vec{v}(c) - \vec{v}(I_2) = -\omega \vec{u_z} \wedge b\vec{u_y} = \omega b \vec{u_x}$

Pas de glissement en I donc $\vec{v}(I_2) = \vec{0} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}(c) = \omega b \vec{u_x}}}$

c) L'action mécanique du moteur sur la roue est un couple de forces de résultante $\vec{R}(\text{moteur}) \overset{\text{couple}}{=} \vec{0}$ et de moment $\vec{\Gamma} = -\Gamma \vec{u_z}$

Forces extérieures en plus : poids ($\vec{mg}$), forces du sol sur la roue : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$ ← frottement.

4) Dans le réf. du sol (R) galiléen : $\boxed{m \dfrac{d\vec{v}(c)}{dt} = \vec{mg} + \vec{N} + \vec{f} + \underbrace{\vec{R}(\text{moteur})}_{\vec{0}}}$

avec $\vec{mg} = -mg\vec{u_y}$; $\vec{N} = N\vec{u_y}$; $\vec{f} = f\vec{u_x}$ donc en projetant : $N = mg$ et $\dot{v}(c) = \dfrac{f}{m}$

d'après b) on a $f = m\dot{\omega}b$

5) Th du moment cinétique dans le réf barycentrique R^* → car, dans R^*, le mouvement de la roue est une rotation autour d'un axe fixe.

$$\frac{d\vec{L^*}}{dt} = \vec{CC} \wedge \vec{mg} + \vec{CI} \wedge \vec{N} + \vec{CI} \wedge \vec{f} + \vec{\Gamma}$$

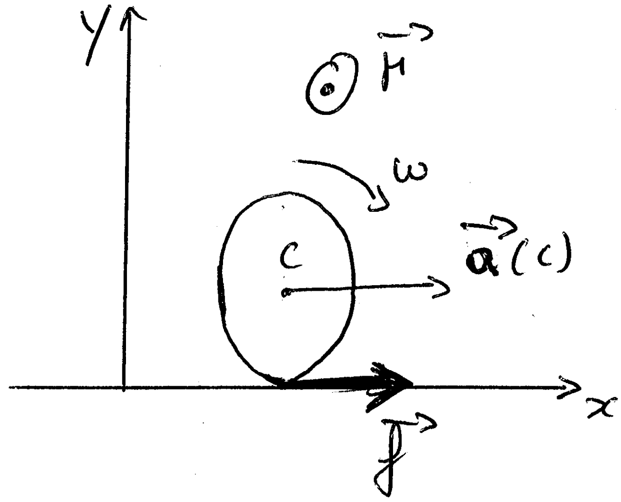
Avec $\vec{L^*} = J_\Delta \vec{\Omega} = -mb^2 \omega \vec{u_z}$

donc $\quad -mb^2\dot{\omega}\,\vec{u_z} = \vec{0} + \vec{0} + bf\,\vec{u_z} - \Gamma\,\vec{u_z}$

d'après 4) $\quad f = m\dot{\omega}b$ donc il vient

$$\dot{\omega} = \frac{\Gamma}{2mb^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{a}(C) = \frac{\Gamma}{2mb}\,\vec{u_x}}}$$

ainsi $\quad \underline{\underline{\vec{f} = \frac{\Gamma}{2b}\,\vec{u_x}}}$



avec $\Gamma > 0 \Rightarrow \dot{\omega} > 0$, $a > 0$
et $\vec{f}$ vers les $x > 0$

Si $\Gamma = 0$ (le moteur n'agit pas)

$\Rightarrow f = 0$, $\dot{\omega} = 0$ et $a = 0$

$\Rightarrow \vec{v}(C) = \vec{c^{te}}$

<u>mouvement uniforme.</u>

<u>Remarque:</u> Dans l'énoncé, on dit qu'il n'y a pas de glissement il faut donc que le frottement soit statique, c'est à dire:

$\|\vec{f}\| \leq \mu \|\vec{N}\|$

cela impose la condition $\dfrac{\Gamma}{2b} \leq \mu mg$

soit $\quad \underline{\underline{\Gamma \leq 2b\mu mg.}}$

Si le moment du couple est $> 2b\mu mg$ la roue dérape (il y a glissement)