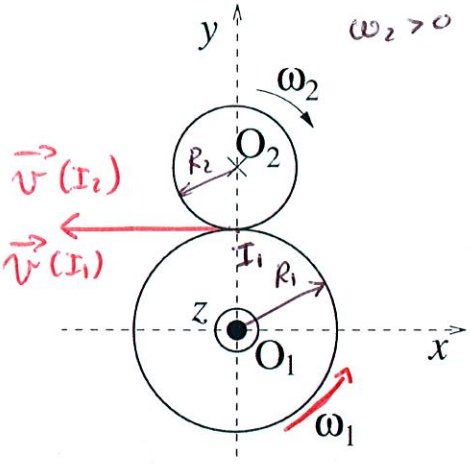
Contrôle de mécanique du solide - corrigé

Exercice 1 : Engrenages.



a) Les roues 1 et 2 tournent autour des axes $(O_1 ; z)$ et $(O_2 ; z)$ respectivement

donc $\underline{\underline{\vec{\Omega}_1 = \omega_1 \vec{u_z}}}$ et $\underline{\underline{\vec{\Omega}_2 = -\omega_2 \vec{u_z}}}$

b) $\dfrac{d\overrightarrow{O_1I_1}}{dt} = \vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1I_1}$ (Varignon car O_1 et $I_1 \in$ roue 1)

$\vec{v}(I_1) - \underbrace{\vec{v}(O_1)}_{=\vec{0}} = -\omega_1 R_1 \vec{u_x}$ avec $\omega_1 > 0$

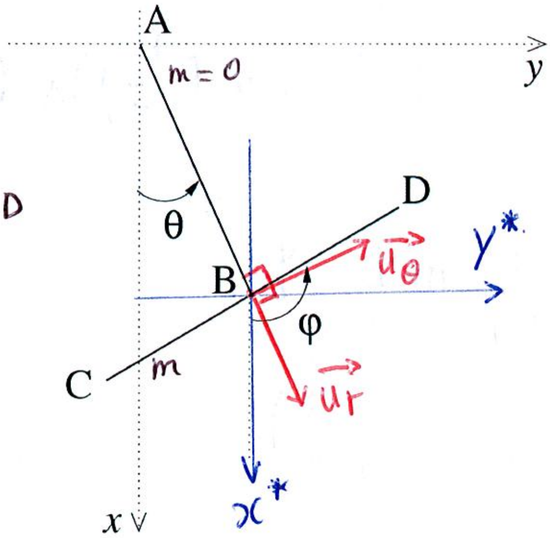
donc $\underline{\underline{\vec{v}(I_1) = -\omega_1 R_1 \vec{u_x}}}$

c) De même $\dfrac{d\overrightarrow{O_2I_2}}{dt} = \vec{\Omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_2I_2}$ donc $\underline{\underline{\vec{v}(I_2) = -\omega_2 R_2 \vec{u_x}}}$

d) en $I \equiv I_1 \equiv I_2$ pas de glissement $(\vec{v_g} = \vec{0})$ donc $\vec{v}(I_1) = \vec{v}(I_2)$

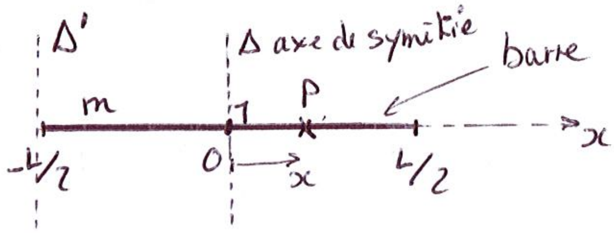
ainsi $\underline{\underline{R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2}}$

Exercice 2 :



$L = CD$

1) a)



masse linéique uniforme λ : $m = \lambda L$

$J_\Delta = \displaystyle\int_{P \in \text{barre}} dm\, HP^2$ avec $dm = \lambda dx$ et $H \equiv O$

$J_\Delta = \displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda\, dx = \frac{\lambda}{3}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} m L^2}}$

b) Th. Huygens : soit $\Delta' \,//\, \Delta$. $G_{\text{barre}} \in \Delta$

donc $J_{\Delta'} = J_\Delta + m(\underbrace{d_{\Delta-\Delta'}}_{=L/2})^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} m L^2}}$

distance entre Δ et Δ'

2) Le centre de masse de la barre (CD) est B. Soit le référentiel barycentrique $R^*(B, x^*, y^*, z^*)$

a) Dans R^*, la barre CD tourne, autour de l'axe fixe $(B; z^*)$, à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$;

donc $L^*_{(B;z^*)} = J\dot{\varphi} = \frac{1}{12} m L^2 \dot{\varphi}$. Le mouvement de CD est dans le plan (H, x, y)

donc $\vec{L}^* \,//\, \vec{u}_z$ donc $\underline{\underline{\vec{L}^* = \frac{1}{12} m L^2 \dot{\varphi}\, \vec{u_z}}}$ car $\vec{L}^* \cdot \vec{u_z} = L^*_{(B;z)}$

b) Th le th de Koenig :

$$\underset{\uparrow \text{ dans } R}{\overrightarrow{L_A}}(\text{barre } CD) = m\,\overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}(B) + \overrightarrow{L^*}$$

car $B \equiv G$(barre CD)

B est sur un cercle de rayon $AB = L$; $\overrightarrow{AB} = L\,\overrightarrow{u_r}$

$$\Rightarrow \vec{v}(B) = L\,\dot{\overrightarrow{u_r}} = L\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

donc $$\overrightarrow{L_A} = m L^2 \dot{\theta}\,\underbrace{\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}}_{=\overrightarrow{u_z}} + \frac{1}{12} m L^2 \dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{L_A} = m L^2 \left(\dot{\theta} + \frac{1}{12}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{u_z}}}$$

c) Th de Koenig pour énergie cinétique

car rotation autour d'un axe fixe dans R^*

$$\underset{\uparrow \text{ dans } R}{E_c} = \frac{1}{2} m\, v(B)^2 + E_c^* \quad \text{avec } E_c^* = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} m L^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\underline{\underline{E_c = \frac{1}{2} m L^2 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12}\dot{\varphi}^2\right)}}$$