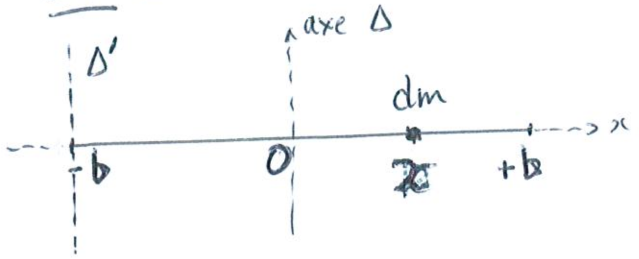
Ex. 1



a) barre homogène : masse linéique λ

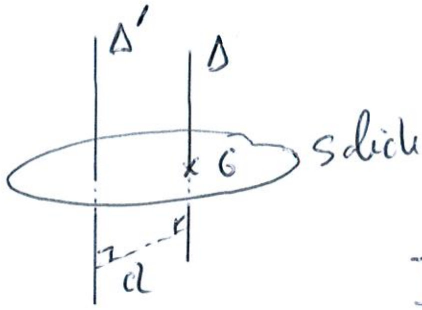
$$\lambda = \frac{m}{2b}$$

en x : $dm = \lambda\, dx$

donc $J_\Delta = \int_{-b}^{b} x^2 \lambda\, dx = \frac{m}{2b} \int_{-b}^{b} x^2 dx$

donc $\underline{\underline{J_\Delta = \frac{1}{3} m b^2}}$

b) th de Huygens :



$\begin{cases} \Delta' \parallel \Delta \\ \text{avec } G \in \Delta \end{cases}$

d = distance Δ-Δ'

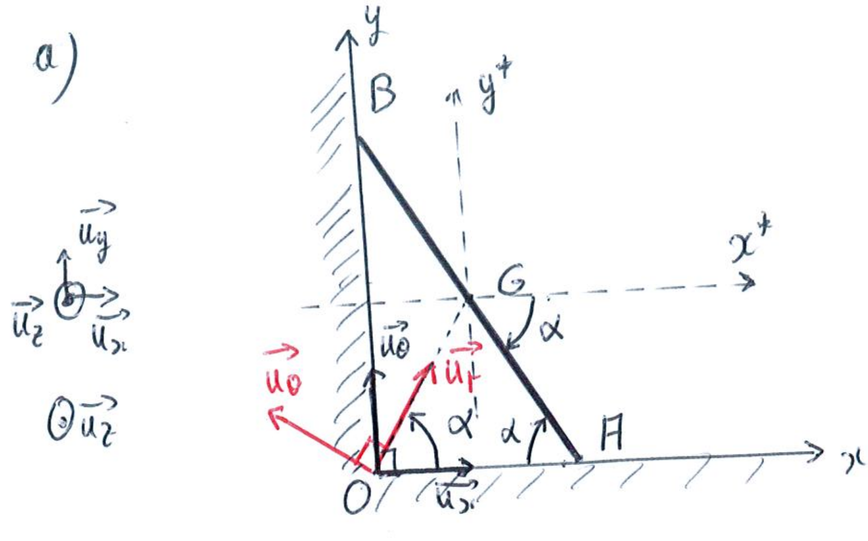
$\underline{\underline{J_{\Delta'} = J_\Delta + m d^2}}$

c) Cas de la barre de la question a) $G \equiv O$ milieu de la barre

donc $J_{\Delta'} = J_\Delta + b^2 m = \left(\frac{1}{3} + 1\right) m b^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3} m b^2}}$

Ex 2 : Chute d'une barre le long d'un mur

a)



$A(x_A, 0)$

$B(0, y_B)$

G milieu de $[A, B]$

donc $G\begin{pmatrix} x_A/2 \\ y_B/2 \end{pmatrix}$

$AB = \sqrt{x_A^2 + y_B^2} = 2b$

$OG = \sqrt{\frac{x_A^2}{4} + \frac{y_B^2}{4}} = \frac{AB}{2} = b$

Donc G est sur un cercle de centre **O** et de rayon **b**.

en coordonnées polaires (dans R) $\quad \vec{OG} = b\,\vec{u_r}$ donc $\underline{\vec{v}(G) = b\dot{\alpha}\,\vec{u_\theta}}$ (1)

et $\vec{a}(G) = \dot{\vec{v}}(G) = \underline{b\ddot{\alpha}\,\vec{u_\theta} - b\dot{\alpha}^2\,\vec{u_r}}$ (2)

Remarque pendant la chute de la barre $\dot{\alpha} < 0$

b) Soit $R^*(G, x^*, y^*)$ le réf. barycentrique de la barre dans R

dans R^* le mouvement de la barre est une rotation autour d'un axe fixe (Oz^*) donc $\underline{\vec{\Omega}^* = -\dot{\alpha}\,\vec{u_z}}$ dans R^* (car $\dot{\alpha} < 0$)

R^* est en translation par rapport à R donc $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^* = -\dot{\alpha}\,\vec{u_z}} \ (3) \\ \text{dans } R \end{array} \right.$

c) Dans R^* rotation autour d'un axe fixe (Gz^*)

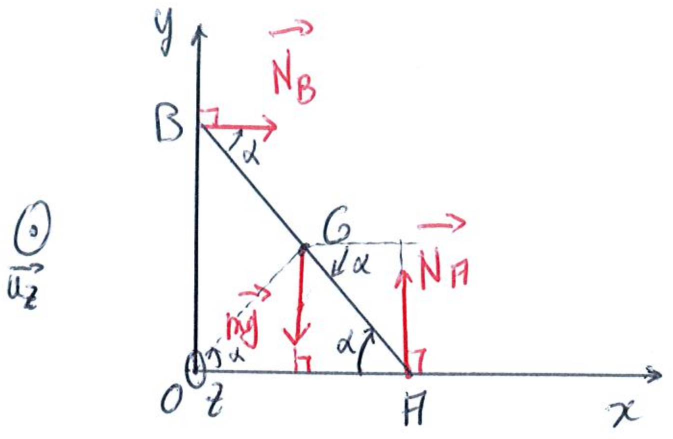
donc $\vec{L^*} = I_{(Gz^*)}(-\dot{\alpha})\,\vec{u_z} = \underline{-\frac{1}{3}mb^2\dot{\alpha}\,\vec{u_z}}$ (4)

<u>Dans R :</u> Th de Koënig : $\vec{L_O} = \vec{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L^*}$

$= b\,\vec{u_r} \wedge mb\dot{\alpha}\,\vec{u_\theta} - \frac{1}{3}mb^2\dot{\alpha}\,\vec{u_z}$

$$\vec{L}_O = \frac{2}{3} m b^2 \dot{\alpha}\, \vec{u}_z \qquad (5)$$

d)



- poids $m\vec{g}$
- force du mur sur barre sans frottement $\vec{N}_B$
- force du sol sur barre sans frottement $\vec{N}_A$

e) PFD dans (R) Galiléen : $m\dot{\vec{v}}(G) = m\vec{g} + \vec{N}_B + \vec{N}_A \qquad (6)$

$\vec{N}_B = N_B \vec{u}_x$; $\vec{N}_A = N_A \vec{u}_y$ et $m\vec{g} = -mg\,\vec{u}_y$

$\vec{a}(G) = b\ddot{\alpha}\,\vec{u}_\theta - b\dot{\alpha}^2\,\vec{u}_r$ or $\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\alpha\,\vec{u}_x + \cos\alpha\,\vec{u}_y \end{cases}$

donc d'après (6) $\begin{cases} -mb\ddot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\alpha}^2\cos\alpha\, m = N_B & (7) \\ mb\ddot{\alpha}\cos\alpha - mb\dot{\alpha}^2\sin\alpha = N_A - mg & (8) \end{cases}$

th du moment cinétique barycentrique :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{GG}\wedge m\vec{g} + \vec{GA}\wedge\vec{N}_A + \vec{GB}\wedge\vec{N}_B$$

$$= 0 + GA\times N_A\times\cos\alpha\,\vec{u}_z - GB\times N_B\times\sin\alpha\,\vec{u}_z$$

$$-\frac{1}{3} m b^2 \ddot{\alpha}\,\vec{u}_z = (b N_A\cos\alpha - b N_B\sin\alpha)\,\vec{u}_z$$

donc $-\frac{1}{3} m b\ddot{\alpha} = N_A\cos\alpha - N_B\sin\alpha \qquad (9)$

f) (8) × cos α − (7) × sin α : $mb\ddot{\alpha} = N_A\cos\alpha - N_B\sin\alpha - mg\cos\alpha$

d'après (9) $mb\ddot{\alpha} = -\frac{1}{3} m b\ddot{\alpha} - mg\cos\alpha$

soit $\boxed{\frac{4}{3} m b \ddot{\alpha} + mg \cos\alpha = 0}$ (10)

<u>Remarque 1 :</u> La résolution de ce problème est plus simple par l'énergie :

$$\begin{cases} E_c(\text{barre}) \overset{\text{Koënig}}{=} \frac{1}{2} m v^2(G) + E_c^* = \frac{1}{2} m b \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{J_{(z)}}_{\frac{1}{3} m b^2} \dot{\alpha}^2 \\ \text{dans } R \qquad E_c = \frac{2}{3} m b^2 \dot{\alpha}^2 \end{cases}$$

initialement $\alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et $v(G) = 0$ donc :

$$\Delta E_c = E_c - E_{c\,\text{initial}} = \frac{2}{3} m b^2 \dot{\alpha}^2$$

travaux des forces : $\vec{N_A} \perp \vec{v}(A)$ N_A ne travaille pas

$\vec{N_B} \perp \vec{v}(B)$ N_B "

$$\begin{cases} W(\text{poids}) = -\Delta E_{pot} = -mg\,\Delta z_G = mg(b - b\cos\alpha) \\ \text{travail} \qquad \text{car } \Delta z_G = z_{final} - z_{initial} = b\sin\alpha - b \end{cases}$$

donc le th de la variation de l'énergie cinétique dans R donne :

$$\frac{2}{3} m b^2 \dot{\alpha} = mg(b - b\sin\alpha) \quad (11)$$

en dérivant on obtient : $\frac{4}{3} m b^2 \ddot{\alpha} \dot{\alpha} = + b \dot{\alpha} \cos\alpha$ (10)

<u>Remarque 2 :</u> On peut remarquer que la force N_B pousse la barre vers $x > 0$ il est donc possible de calculer que la barre n'est plus en contact avec le mur à partir d'un certain angle α_1 obtenu lorsque $N_B = 0$

D'après (7), (10) et (11) on peut trouver N_B et en déduire $\alpha_1 = \frac{2}{3} \sin\alpha_0$

d'après $N_B(\alpha_1) = 0$)