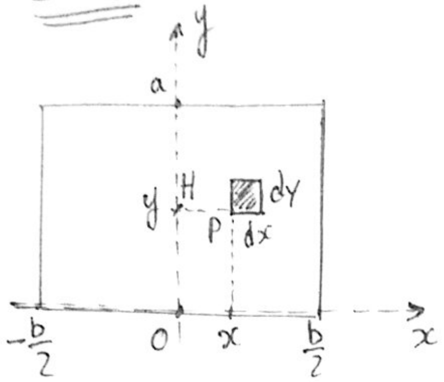
L2 Contrôle de Mécanique du Solide 10 octobre 2016

Ex1 :



σ : masse surfacique uniforme (plaque homogène)

$$m = \iint_{P \in \text{plaque}} \sigma \, dS = \sigma S = \sigma a b$$

$$J_\Delta = J_{(Oy)} = \iint_{P \in \text{plaque}} HP^2 \, dm(P)$$

voir schéma

$$= \iint x^2 \sigma \, dx\, dy = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx \int_0^a dy$$

$$= \frac{1}{12} b^3 \sigma a = \boxed{\frac{1}{12} m b^2}$$

(Rmq : on retrouve le même résultat que le cas d'une barre entre $-\frac{b}{2}$ et $\frac{b}{2}$)

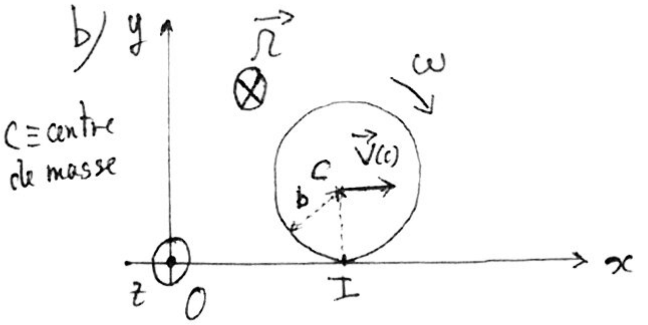
Ex2 :

a) th. Koënig pour moment cinétique : (pour solide indéformable de masse m et de centre de masse G)

$$\vec{L}_O = m \, \vec{OG} \wedge \vec{V}(G) + \vec{L^*}$$

démonstration : voir cours

b)



- dans $R(O,x,y,z)$: $\vec{v}(C)$ et $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\text{roue})$
- dans R^* (réf barycentrique) la roue est en rotation autour d'un axe fixe (C, z^*)

$$\vec{\Omega}^* = -\omega \vec{u_z} \quad \text{avec} \quad \omega = \|\vec{\Omega}^*\|$$

or $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^*$ car R^* en translation / R.

b1) C et I ∈ roue donc (Varignon) : $\vec{V}(C) - \vec{V}(I) = \frac{d}{dt}(\vec{IC}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{IC} = -\omega \vec{u_z} \wedge b \vec{u_y}$

or pas de glissement en I donc $\vec{V}(I) = \vec{V}_{sol} = \vec{0}$ $\Longrightarrow$ ainsi $\underline{\vec{V}(C) = \omega b \vec{u_x}}$

b2) . Dans R^* la roue est en rotation autour d'un axe fixe (Cz^*) donc $L_{(Cz^*)} = -J\omega$ sens de rotation

. Tous les points de la roue ont une vitesse // plan (Cx^*y^*) et $C \in (Cx^*y^*)$ donc $\vec{L}^*_C \perp (Cx^*y^*)$.

Donc $\vec{L}^*_C = \vec{L}^* = L^* \vec{u_z}$ or $L_{(Cz^*)} = \vec{L}^*_C \cdot \vec{u_z} = L^* = -J\omega$ donc $\underline{\vec{L}^* = +J\vec{\Omega}}$

b3) Koënig :

$$\vec{L}_O = \vec{L^*} + m \, \vec{OC} \wedge \vec{V}(C) = -J\omega \vec{u_z} + m(\vec{OI} + \vec{IC}) \wedge \omega b \vec{u_x}$$

$$= -\frac{1}{2} m b^2 \omega \vec{u_z} + m \underbrace{\vec{OI} \wedge \omega b \vec{u_x}}_{=\vec{0}} + m \, b \vec{u_y} \wedge \omega b \vec{u_x}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} m b^2 \omega - m \omega b^2\right) \vec{u_z} = \underline{-\frac{3}{2} m b^2 \omega \vec{u_z}}$$