Mécanique du solide indéformable

Chapitre I. Action mécanique sur un solide. Solide à l'équilibre.

1. Centre de masse G

- pour ensemble de **masse ponctuelles** m_i en Pi : $m = \sum_i m_i$

$$\boxed{\forall O:\ m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OP_i}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_i m_i\ \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}} \qquad (1.1)$$

- pour une *masse m* **répartie continûment** (masse distribuée) : $m = \int_{P\in solide} dm(P)$

$$\boxed{\forall O:\ m\overrightarrow{OG} = \int_{P\in solide} dm(P)\overrightarrow{OP_i}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int_{P\in solide} dm\ \ \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}} \qquad (1.1')$$

pour une distribution de masse **linéique** λ : $dm(P)=\lambda(P)dl(p)$ et somme simple $\int ...$

pour une distribution de masse **surfacique** σ : $dm(P)=\sigma(P)dS(p)$ et somme double $\iint ...$

pour une distribution de masse **volumique** ρ : $dm(P)=\rho(P)d\tau(p)$ et somme triple $\iiint ...$

Remarque : dans le suite de ce formulaire $\int_P ...$ veut dire $\int_{P\in solide} ...$ avec intégrale simple, double ou triple, selon la nature linéique, surfacique ou volumique de la masse distribuée continûment.

2. Force ponctuelle, moment d'une force ponctuelle

Soit une force $\vec{F}$ appliquée en A.

Déf. On appelle **moment de $\vec{F}$ en O** (moment de $\vec{F}$ par rapport à O) le vecteur :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA}\wedge\vec{F} \qquad (1.2)$$

Déf. On appelle **ligne d'action** de $\vec{F}$, la droite $(D_{\vec{F}})$ passant par A et $//\vec{F}$.

Prop : $\forall O\in(D_{\vec{F}}):\ \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \vec{O}$

Def. : Le **bras de levier** par rapport à O est la distance entre la ligne d'action $(D_{\vec{F}})$ et le point O.

Déf. **Moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté Δ** (orienté dans le direction $\vec{u}_\Delta$) :

$$\forall O\in\Delta:\ M_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F})\cdot\vec{u}_\Delta \qquad (1.3)$$

- On montre facilement que $M_\Delta(\vec{F})$ ne dépend pas de O, $\forall O\in\Delta$
- Le signe du moment par rapport à Δ dit si la force fait tourner dans le sens positif ou négatif (le sens + ou – étant défini par le sens de $\vec{u}_\Delta$).

3. Action mécanique (ensemble de forces) sur un solide

3.1 Résultante $\vec{R}$ des forces et **moment total** en O $\overrightarrow{M_O}$:

- Ensemble de forces ponctuelles $\vec{F}_i$ appliquée en A_i : $\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i}$ (1.4)

  et $\boxed{\overrightarrow{M_O} = \sum_i \overrightarrow{OA_i}\wedge\vec{F}_i}$ 1.5)

- Ensemble de forces distribuées : $d\vec{F}(P)$ appliquée en P : $\boxed{\vec{R} = \int_P d\vec{F}(P)}$ (1.4')

  et $\boxed{\overrightarrow{M_O} = \int_P \overrightarrow{OP}\wedge d\vec{F}(P)}$ (1.5') prop. : Pour tout O et O' : $\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OO'}}$ (1.6)

3.2 Force de frottement solide (contact entre 2 solides)

a.) Point de contact :

Soient deux solides indéformables (S_1) et (S_2) en contact l'un avec l'autre en un point. Dans un référentiel (R), on définit trois points qui à l'instant t coïncident (les 3 points sont confondus à t) :

- Point I : lieu géométrique du point de contact.
- Point I_1 : point du solide (S_1) qui coïncide avec I à l'instant t. I_1 est fixe par rapport à (S_1).
- Point I_2 : point du solide (S_2) qui coïncide avec I à l'instant t. I_2 est fixe par rapport à (S_2).

b) Vitesse de glissement de (S_1) par rapport (S_2) : $\boxed{\vec{v}_g\big((S_1)/(S_2)\big) = \vec{v}_{(R)}(I_1)-\vec{v}_{(R)}(I_2) = \vec{v}_{(S_2)}(I_1)}$ (1.7)

- Avec les formules de changement de référentiel on montre facilement que la vitesse $\vec{v}_g$ est indépendante du référentiel (R) dans lequel on la calcule.
- $\vec{v}_g$ est parallèle à la surface de contact entre les deux solides.
- $\vec{v}_g\big((S_1)/(S_2)\big) = -\vec{v}_g\big((S_2)/(S_1)\big)$

c) Action de contact entre solide : La force de contact $\vec{R}$ de (S_2) sur (S_1) se décompose en deux composantes perpendiculaires : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ avec $\vec{N}$ perpendiculaire à la surface de contact et $\vec{T}$ parallèle à la surface de contact. $\vec{T}$ est la **force de frottement** (S_2) sur (S_1).

Deux cas sont à considérer :

- Si $v_g = 0$, il n'y a pas de glissement, le **frottement est statique** : $\boxed{\|\vec{T}\| \leqslant f_s\|\vec{N}\|}$, (1.8)
- Si $v_g \neq 0$, il y a glissement, le **frottement est dynamique** (« cinétique ») :

  $\boxed{\|\vec{T}\| = f_d\|\vec{N}\|}$ (1.9)

  et $\vec{T}$ est dans le sens opposé à $\vec{v}_g\big((S_1)/(S_2)\big)$.

où f_s et f_d sont, respectivement les coefficients de frottement statique et dynamique.

En général : $f_d \leqslant f_s$.

Le **glissement est dit « parfait »** lorsque les frottements peuvent être négligés : $f_d = 0$.

3.2 Couple de force

Def. : un **couple de force** est un ensemble de force (ponctuelles ou réparties) dont la résultante est nulle : $\vec{R}=\vec{O}$

Prop. : le moment en O d'un couple de force ne dépend pas de O : $\overrightarrow{M_O} = \vec{\Gamma}$

4. Solide à l'équilibre statique

Loi de la statique : Quelque que soit le système considéré, **dans un référentiel *R* galiléen** :

- la résultante des forces extérieures (actions extérieures) sur le système est nulle : $\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$
- le moment total en O de toutes les forces extérieures (actions extérieures) sur le système est nul, quelque soit O **fixe** dans *R* : $\boxed{\overrightarrow{M_O}(\text{actions extérieures}) = \vec{0}}$

Chapitre II. Cinétique d'un solide indéformable

1. Référentiel du solide. Référentiel du centre de masse

Déf. Un **référentiel du solide indéformable** R_S est un référentiel dans lequel tous les points du solide sont fixes.

Déf. : Soit un référentiel *R*(0,x,y,z). Un **référentiel barycentrique** (ou **référentiel du centre de masse**), noté ***R****, du solide dans *R* est un référentiel d'origine *G* et en translation par rapport à *R*.

Exemple : Le référentiel *R**(G,x*,y*,z*) tels que (*Ox*) // (*Gx**), (*Oy*) // (*Gy**) et (*Oz*) // (*Gz**), est un référentiel barycentrique dans *R*(0,x,y,z).

Remarque : Dans *R** le mouvement du solide indéformable est toujours un mouvement de rotation autour de G.

Remarque : On note $\vec{v}^*(P)$ la vitesse d'un point *P* du solide dans *R**.
Il est évident que par construction : $\vec{v}^*(G)=\vec{0}$

2. Distribution des vitesses dans un solide indéformable (rigide)

Déf. : Un **solide rigide** (ou **solide indéformable**) est un solide tel que :
$\forall A\in Solide,\ \forall B\in Solide: AB=\|\overrightarrow{AB}\|=Constante$, c'est à dire indépendant du temps.

2.1. Solide en translation dans *R* :

Déf. : A chaque instant *t*, **tous les points *P* du solide ont la même vitesse**.

De même tous les points fixes dans un référentiel du solide ont même vitesse.

2.2. Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ dans *R* :

Def. Tous le points du solide ont une trajectoire circulaire centrée sur l'axe Δ et dans un plan perpendiculaire à Δ .

- $\forall P\in Solide,\ \forall I\in\Delta:\ \vec{v}(P)\ =\ \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{IP}$ (2.1)
- $\vec{\Omega}=\omega\vec{u}_\Delta$ est le **vecteur instantané de rotation** dans *R*.
- ω est la **vitesse angulaire instantanée** de rotation.

De même pour tous les points *P* fixes dans un référentiel du solide.

2.3. Mouvement quelconque d'un solide.

Un mouvement quelconque d'un solide combine rotation et translation

On peut encore définir un **vecteur instantané de rotation** $\vec{\Omega}(t)$

Déf. : **L'axe instantané de rotation** : est, à l'instant *t*, la droite // $\vec{\Omega}(t)$ dont les points ont une vitesse // $\vec{\Omega}(t)$.

Prop. : Les vecteurs rotations instantanés dans *R* et *R** sont égaux, car *R** est en translation par rapport à *R* : $\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}^*(t)$ (2.2)

Formule de Varignon : pour un **solide indéformable** dans un référentiel *R* :

$$\boxed{\forall A \in Solide,\ \forall B \in Solide:\ \vec{v}(B) - \vec{v}(A) = \frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}} \qquad (2.3)$$

De même pour tous points A et B fixes dans un référentiel du solide.

Prop. : **Equiprojectivité des vitesses** : en projetant la formule de Varignon sur $\boxed{\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$, on trouve facilement les projections des vitesses de A et B sont égales : $\boxed{\vec{v}(B)\cdot\vec{u} = \vec{v}(A)\cdot\vec{u}}$ (2.4)

3. Quantité de mouvement (résultante cinétique)

Déf. : La quantité de mouvement d'un système dans *R* est :

$$\boxed{\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i} \quad (2.5) \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{p} = \int_P dm(P)\,\vec{v}(P)} \qquad (2.5')$$

Prop. Pour tout système, on montre facilement (en dérivant la définition de G) : $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}(G)}$ (2.6)

4. Moment cinétique

Déf. **Moment cinétique en O** (par rapport à un point O) : $\boxed{\vec{L}_O = \sum_i m_i \overrightarrow{OP}_i \wedge \vec{v}_i}$ (2.7)

ou bien $\boxed{\vec{L}_O = \int_P dm(P)\,\overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}(P)}$ (2.7')

Prop. Quelque soient O et O' : $\boxed{\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{p} \wedge \overrightarrow{OO'}}$ (2.8)

Déf. **Moment cinétique par rapport à un axe orienté** Δ (orienté dans le direction $\vec{u}_\Delta$) :

$$\boxed{\forall O \in \Delta:\ L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta} \qquad (2.9)$$

Remarques :

- L_Δ est indépendant de O point de Δ .
- Le signe de L_Δ est +/- si l'objet tourne dans le sens +/- défini par le sens de $\vec{u}_\Delta$. (Cf. règle de la main).

Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ dans R, vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_\Delta$:

- $\boxed{L_\Delta = J_\Delta \omega}$ (2.10)
- J_Δ est le **moment d'inertie du solide par rapport à** Δ .
- **Déf**. : $\boxed{J_\Delta = \int_P HP^2\,dm(P)}$ où H est la projection orthogonale de *P* sur Δ (2.11)

Théorème de Huygens / Steiner : Soient 2 axes Δ et Δ' parallèles entre eux.
Si $G \in \Delta$ alors $\boxed{J_{\Delta'} = J_\Delta + md^2}$, où *d* est la distance entre Δ et Δ' . (2.12)

Prop. : Soit un référentiel *R*. Dans le référentiel barycentrique *R** associé à *R*, le moment cinétique $\boxed{\vec{L}_O^* = \vec{L}^*}$, appelé **moment cinétique barycentrique**, est indépendant de O.

<u>Théorème de Kœnig :</u> Pour un **solide indéformable**, $\forall$ référentiel *R* : $\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}^* + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p}}$ (2.13)

Propriété de symétrie :

Soit π, un plan de symétrie de la distribution de masse, et Δ, un axe perpendiculaire à π. Soit A le point d'intersection entre π et Δ. Si le solide tourne autour de Δ, de vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_\Delta$, le moment cinétique en A, $\vec{L}_A$, est parallèle à Δ. et $\vec{L}_A = J_\Delta \omega \vec{u}_\Delta$.

Rmq : En général, si A est un point de Δ, mais A n'appartient pas à un plan de symétrie de la distribution de masse, alors $\vec{L}_A$ n'est pas parallèle à Δ.

5. Energie cinétique

<u>Déf</u>. : l'énergie cinétique d'un solide est : $\boxed{E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2}$ *(si masse ponctuelles)* *(2.14)*

ou bien $\boxed{E_c = \int_P \frac{1}{2} dm(P) \|\vec{v}(P)\|^2}$ (2.14')

<u>Théorème de Kœnig :</u> Pour un **solide indéformable,** $\forall$ *R* **:** $\boxed{E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m \|\vec{v}(G)\|^2}$ (2.15)

où $\boxed{E_c^* = \int_P \frac{1}{2} dm(P) \|\vec{v}^*(P)\|^2}$ est l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique.

<u>Prop</u>. :

- Si le solide est en translation dans *R :* $\boxed{E_c^* = 0}$, car le solide est fixe dans *R**
- Si le solide est en rotation dans *R* autour d'un axe fixe Δ : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$ (2.16)

Chapitre III. Dynamique des solides indéformables

1) Théorème de la résultante cinétique

Loi de Newton : Dans un **référentiel *R* galiléen** :

$$\boxed{\forall \text{système} : \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{extérieures sur système}}} \quad (3.1)$$

2) Théorème du moment cinétique

D'après (3.1) on peut démontrer le théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel *R* galiléen : $\boxed{\forall \text{système}, \forall A \text{fixe} : \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{extérieures sur système}})}$ (3.2)

Remarque : pour un système quelconque : on peut monter que $\boxed{\sum \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{intérieure au système}}) = 0}$

Théorème du moment cinétique au centre d'inertie pour solide indéformable

Dans un référentiel *R* galiléen, pour un **solide indéformable** : $\boxed{\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{extérieures sur système}})}$ (3.3)

Remarque : vrai quelque soit le mouvement de *G* dans *R*.

Théorème de moment cinétique dans le référentiel barycentrique : $\vec{L}^* = \vec{L}_G$ donc

Dans un référentiel *R* galiléen, pour un **solide indéformable** : $\boxed{\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{extérieures sur système}})}$ (3.4)

3) Théorème du moment cinétique par rapport à un axe

En projetant les formules (3.2) (3.3) et (3.4)sur un axe Δ (orienté dans le direction $\vec{u}_\Delta$) :

Dans un référentiel *R* galiléen : $\boxed{\forall \Delta \text{fixe} : \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F}_{\text{extérieures sur système}})}$ (3.5)

Cas particuliers

- Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ $\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta\frac{d\omega}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F}_{\text{extérieures sur système}})}$ (3.6)

- Solide en rotation autour d'un axe Δ , contenant G, dont la direction est fixe :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = \frac{dL_\Delta^*}{dt} = J_\Delta\frac{d\omega}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F}_{\text{extérieures sur système}})} \quad (3.7)$$

4) Remarque sur les systèmes de masse nulle

Certains sous-systèmes d'un système étudié peuvent avoir une masse négligeable devant les autres sous-systèmes :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{extérieures sur système de masse nulle}} = \vec{0}} \text{ et } \boxed{\sum \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{extérieures sur système de masse nulle}}) = \vec{0}} \quad (3.8)$$

Chapitre IV. Aspect énergétique de la dynamique des solides indéformables

1. Définition puissance et travail :

Déf. : **Puissance d'une force appliquée en *A*** : $P_u = \vec{F}\cdot\vec{v}(A)$ (4.1)

Force répartie : $P_u = \int_P d\vec{F}(P)\cdot\vec{v}(P)$ (4.2)

Cas particulier du **poids** : on montre facilement que $P_u(\text{poids}) = \int_P \rho\, d\tau\, \vec{g}\cdot\vec{v}(P) = m\vec{g}\cdot\vec{v}(G)$ (4.3)

Travail d'une force appliquée en *A* entre les temps t_1 et t_2 : $W = \int_{t_1}^{t_2} P_u dt = \int_{A(t_1)}^{A(t_2)} \vec{F}\cdot d\vec{l}$ (4.4)

2. Puissance d'une action mécanique (ensemble de forces) sur un solide indéformable

Soit une action mécanique (ensemble de forces) de résultante $\vec{R}$
La puissance totale P_u la puissance de l'action est la somme des puissances de chaque force

Pour un solide indéformable : $\boxed{\forall A:\ P_u(\text{action}) = \vec{R}\cdot\vec{v}(A) + \vec{M}_A(\text{action})\cdot\vec{\Omega}_{\text{solide}}}$ (4.5)

Pour solide indéformable : $\boxed{P_u(\text{actions intérieures}) = 0}$ (4.6)

Cas particulier : **pour solide indéformable**

- Couple de force : $\boxed{P_u(\text{couple}) = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega}_{\text{solide}}}$ (4.7)
- Solide indéformable en rotation autour d'un axe Δ fixe : $\boxed{P_u = \vec{M}_\Delta(\text{action})\cdot\vec{\Omega}_{\text{solide}}}$ (4.8)
- Les fils inélastiques et cordes inélastiques sont comme des solides indéformables :

  $\boxed{P_u(\text{actions intérieures}) = 0}$

Liaison parfaite :
Une liaison (contact, rotation autour d'un axe...) entre 2 solides est dite **parfaite** ssi les forces mises en œuvre dans cette liaison ne travaillent pas (la puissance de ces forces est nulle).

3. Théorème de la puissance cinétique et théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen *R* :

Théorème de la puissance cinétique :

Pour tout système : $\boxed{\dfrac{dE_c}{dt} = P_u(\text{actions extérieures}) + P_u(\text{actions intérieures})}$ (4.9)

Pour un **solide indéformable** : $\boxed{\dfrac{dE_c}{dt} = P(\text{actions extérieures})}$ (4.10)

Théorème de l'énergie cinétique :

Pour tout système : $\boxed{\Delta E_c = \sum W(\text{actions extérieures}) + \sum W(\text{actions intérieures})}$ (4.11)

Pour un **solide indéformable** : $\boxed{\Delta E_c = \sum W(\text{actions extérieures})}$ (4.12)

Prop. Dans le référentiel barycentrique *R** (si *R* est galiléen), **les forces d'inertie ne travaillent pas**. Les formules (4.10) et (4.12) peuvent donc être appliquées même si *R** n'est pas galiléen (mais il faut que *R* soit galiléen !).