Travaux dirigés série n°I : Solide en mouvement, cinématique

Exercice 12 : Changement de référentiel

Un référentiel (R'(0',x',y',z')) est en mouvement par rapport au référentiel (R(0,x,y,z)). Soient :

- $\vec{v}(O')$ et $\vec{a}(O')$ la vitesse et l'accélération de 0' dans (R),
- $\vec{\Omega}$ vecteur rotation instantané de (R') rapport à (R).

On peut montrer que : quelque soit $\vec{u}'$, vecteur unitaire fixe[1] dans (R'), sa dérivée temporelle dans (R) est : $\left(\frac{d}{dt}\vec{u}'\right)_R = \vec{\Omega}\wedge\vec{u}'$.

a) Montrer que quelque soit le vecteur $\vec{A}(t)$, la dérivée temporelle de $\vec{A}$ dans (R) et la dérivée de $\vec{A}(t)$ dans (R') sont reliées par la relations : $\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A}$.

b) Montrer que la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ d'un point M dans (R) s'écrivent en fonction de la vitesse $\vec{v}'$ et l'accélération $\vec{a}'$ de M dans (R') :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}(O') + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}(O') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\right)\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}'$$

Correction :

a) Soit $\{O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\}$ une base de (R) et $\{O',\vec{u}_x',\vec{u}_y',\vec{u}_z'\}$ une base de (R').

Dans ces bases $\vec{A}(t)$ s'écrit :
$\vec{A}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z = x'(t)\vec{u}_x' + y'(t)\vec{u}_y' + z'(t)\vec{u}_z'$.

La dérivée de $\vec{A}(t)$ dans (R') est : $\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{R'} = \dot{x}'\vec{u}_x' + \dot{y}'\vec{u}_y' + \dot{z}'\vec{u}_z'$ car les vecteurs $\vec{u}_i'$ sont constants dans (R').

La dérivée de $\vec{A}(t)$ dans (R) est :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_R = \dot{x}'\vec{u}_x' + \dot{y}'\vec{u}_y' + \dot{z}'\vec{u}_z' + x'\dot{\vec{u}}_x' + y'\dot{\vec{u}}_y' + z'\dot{\vec{u}}_z'$$

avec $\dot{\vec{u}}_i' = \left(\frac{d}{dt}\vec{u}_i'\right)_R = \vec{\Omega}\wedge\vec{u}_i'$, donc on trouve bien :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{R'} + x'\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_x' + y'\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_y' + z'\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_z' = \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A} \quad (1)$$

1 C'est à dire $\vec{u}'$ indépendant du temps dans le référentiel (R').

b) La formule précédente permet de trouver les formules de changent de référentiel en partant de $\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}(t)$ et $\vec{r\,'}(t)=\overrightarrow{O'M}(t)$.

Par définition,

la vitesse et l'accélération de *M* dans (R) sont : $\vec{v}(M) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_R$ et $\vec{a}(M) = \left(\frac{d}{dt}\vec{v}(M)\right)_R$

et vitesse et l'accélération de *M* dans (R') sont : $\vec{v\,'}(M) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r\,'}\right)_{R'}$ et $\vec{a\,'}(M) = \left(\frac{d}{dt}\vec{v\,'}(M)\right)_{R'}$

En dérivant dans (R) le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r\,'}$ on obtient :

$\vec{v}(M) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'}\right)_R + \left(\frac{d}{dt}\vec{r\,'}\right)_R$ avec $\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'}\right)_R = \vec{v}(O')$;

or d'après la formule (1) : $\left(\frac{d}{dt}\vec{r\,'}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{r\,'}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}$, avec $\left(\frac{d}{dt}\vec{r\,'}\right)_{R'} = \vec{v\,'}(M)$,

ainsi $\vec{v}(M) = \vec{v\,'}(M) + \vec{v}(O') + \vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}$ (2) .

Pour trouver l'accélération, il suffit de dériver cette formule (2) sans oublier des termes dans la dérivée du produit vectoriel.

D'après (1) on a : $\left(\frac{d}{dt}\vec{v\,'}(M)\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{v\,'}(M)\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{v\,'}(M)$ avec $\vec{a\,'}(M) = \left(\frac{d}{dt}\vec{v\,'}(M)\right)_{R'}$

De plus $\left(\frac{d}{dt}\vec{v}(O')\right)_R = \vec{a}(O')$,

et d'après (1) :

$$\left(\frac{d}{dt}\ \vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\right)\wedge\vec{r\,'} + \vec{\Omega}\wedge\left(\frac{d}{dt}r\,'\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}\right)$$

avec $\left(\frac{d}{dt}\vec{r\,'}\right)_{R'} = \vec{v\,'}(M)$.

La dérivée temporelle de (2) dans (R) donne donc :

$$\vec{a}(M) = \vec{a\,'}(M) + \vec{a}(O') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\right)\wedge\vec{r\,'} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v\,'}(M)$$

$\vec{a_e}(M) = \vec{a}(O') + \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\right)\wedge\vec{r\,'} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r\,'}\right)$ est appelée accélération d'entraînement de (R') dans (R).

$\vec{a_c}(M) = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v\,'}(M)$ est appelée accélération de Coriolis.