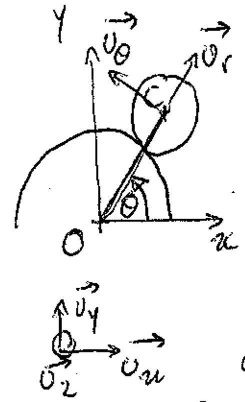
Cinématique d'un cerceau sur un cylindre



Un cerceau de centre C roule autour d'un cylindre de centre O. On cherche tout d'abord à paramétrer le mouvement du cerceau par une variable de position. La distance OC est constante, cela suggère d'utiliser des coordonnées polaires, de centre O. Le centre du cerceau a alors pour coordonnées $(R+b, \theta)$. On définit aussi les vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ liés au cerceau.

<u>Remarque</u>: θ est ici défini dans le sens direct. Si le cerceau ~~[illegible]~~ roule vers l'extrémité droite du cylindre, θ va diminuer et le vecteur vitesse de C sera selon $-\vec{u_\theta}$.

a. On a $\vec{OC} = (R+b)\vec{u_\theta}$. La dérivation donne les vitesse et l'accélération de C dans le repère du cylindre:

$$\vec{v_C} = \frac{d\vec{OC}}{dt} = (R+b)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a_C} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{OC}}{dt} = (R+b)\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - (R+b)\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

b. Le cerceau roule sans glisser. Soit I le point de contact d'icelui avec le cylindre. La vitesse du point du cerceau coïncidant avec I est donc égale à celle du point du cylindre coïncidant avec I, c-à-d $\vec{0}$. La relation de Varignon donne alors

$$\underbrace{\vec{v_I}}_{=\vec{0}} = \vec{v_C} + \vec{\Omega}\wedge\vec{CI} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e_z} \quad \text{vecteur rotation instantanée du cerceau}$$

d'où $(R+b)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \Omega\,\vec{e_z}\wedge(-b\,\vec{u_r}) = \vec{0}$

$$(R+b)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} - b\,\Omega\,\vec{u_\theta} = \vec{0} \qquad \text{soit } \Omega = \frac{R+b}{b}\dot{\theta}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{R+b}{b}\dot{\theta}\,\vec{e_z}$$

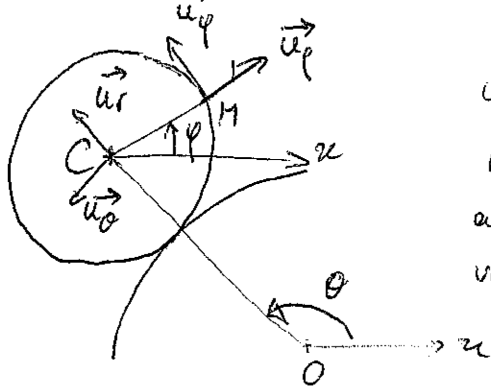
<u>Remarque</u>: Ω est positif si le cerceau tourne dans le sens trigonométrique, c-à-d si il se déplace vers la gauche. Dans ce cas, $\vec{\Omega}$ est dirigé suivant $+\vec{u_z}$, il va donc de la feuille vers le lecteur.

c. Le moment cinétique du cerceau en O est défini par

$$\vec{L_O} = \iiint dm(M)\, \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)$$

On s'intéresse tout d'abord au sens de $\iiint dm(M)$. Cette intégrale porte sur un point M qui va parcourir l'ensemble du cerceau. Le cerceau est supposé infiniment fin, le point M va en fait parcourir un cercle de centre C et de rayon b. Au final, cette intégrale triple sur un volume va se transformer en une intégrale simple sur un cercle.

Pour pouvoir calculer cette intégrale, il va falloir définir un système de coordonnées adapté à ce point M. On va utiliser un autre système polaire, de rayon ρ ("rho") et d'angle φ ("phi").



On définit également les deux vecteurs unitaires $\vec{u_\rho}$ et $\vec{u_\varphi}$ adaptés à ce système. Les deux repères (r,θ) et (ρ, φ) sont a priori non reliés, tout comme les vecteurs $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\varphi})$.

On va donc avoir $\iiint d(M)$ qui va se transformer en une intégrale sur φ variant de 0 à 2π. L'élément d'intégration $dm(M)$ va se transformer en un élément d'intégration $\lambda d\varphi$ (λ est constant car le cerceau est supposé homogène).

Pour déterminer λ, on peut par exemple calculer la masse du cerceau :

$$m = \int dm(M) = \int_0^{2\pi} \lambda\, d\varphi = 2\pi\lambda \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{m}{2\pi}$$

Remarque : mathématiquement, le passage d'une intégrale triple à une intégrale simple s'explique par le recours au concept de distribution, et en particulier de distribution δ de Dirac. Ce concept sera introduit plus tard en maths/méthodes mathématiques.

L'intégrande $\vec{OM} \wedge \vec{v}(M)$ peut se développer via la relation de Chasles $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$.

De plus, la relation de Varignon donne

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(C) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CM}$$
$$= (R+b)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \Omega\,\vec{u_z} \wedge b\,\vec{u_\rho}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{OM} \wedge \vec{v}(M) = &\ \vec{OC} \wedge \vec{v}(C) && (1)\\ &+ \vec{OC} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{CM}) && (2)\\ &+ \vec{CM} \wedge \vec{v}(C) && (3)\\ &+ \vec{CM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{CM}) && (4) \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on intègre chacun de ces termes séparément.

(1) : $\iiint dm(\Pi)\, \vec{OC} \wedge \vec{v}(C)$.

L'intégrande ne dépend pas de Π, on peut donc la sortir de l'intégrale et

$$\iiint dm(\Pi)\, \vec{OC} \wedge \vec{v}(C) = \vec{OC} \wedge \vec{v}(C) . \iiint dm(\Pi)$$
$$= m\vec{OC} \wedge \vec{v}(C)$$
$$= m(R+b)\,\vec{u_r} \wedge (R+b)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$
$$= m(R+b)^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

(2) : $\iiint dm(\Pi)\, \vec{OC} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{C\Pi})$.

$\vec{OC}$ et Ω sont indépendants de Π, on a donc

$$\iiint dm(\Pi)\, \vec{OC} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{C\Pi}) = \vec{OC} \wedge \left(\iiint dm(\Pi)\, \vec{\Omega} \wedge \vec{C\Pi}\right)$$
$$= \vec{OC} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \iiint dm(\Pi)\, \vec{C\Pi}\right)$$

On veut calculer l'intégrale, il faut donc exprimer explicitement $\vec{C\Pi}$ en termes de φ :

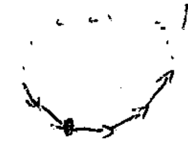
$$\vec{C\Pi} = b\vec{u_\varphi} = b(\cos\varphi\, \vec{u_x} + \sin\varphi\, \vec{u_y})$$
$$\iiint dm(\Pi)\, \vec{C\Pi} = \int_0^{2\pi} d\varphi\; b(\cos\varphi\, \vec{u_x} + \sin\varphi\, \vec{u_y})$$
$$= b\left[\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi\right]\vec{u_x} + b\left[\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right]\vec{u_y}$$

Or $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$ (les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques, de moyenne nulle).

On a donc $\iiint dm(\Pi)\, \vec{C\Pi} = \vec{0}$ soit $\iiint dm(\Pi)\, \vec{OC} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{C\Pi}) = \vec{0}$

<u>Remarque</u> : $\iiint dm(\Pi)\, \vec{C\Pi}$ peut aussi s'écrire $b\int_0^{2\pi} d\varphi\; \vec{u_\varphi}(\varphi)$: c'est l'intégrale d'un vecteur de longueur constante qui fait un tour complet ; on peut donc intuitivement comprendre qu'elle soit nulle

$$\int_0^{2\pi} \vec{u_\varphi}\, d\varphi \simeq \frac{1}{N}\Big(\underbrace{\rightarrow + \nearrow + \nearrow + \nearrow + \dots + \downarrow + \searrow + \rightarrow}_{N \text{ termes}}\Big)$$

$$\simeq \frac{1}{N}\Big($$  $$\Big) \simeq 0$$

$(3) : \iiint dm(M)\, \vec{CM} \wedge \vec{v}(C)$

$$= \underbrace{\left[\iiint dm(M)\, \vec{CM}\right]}_{=\vec{0}} \wedge \vec{v}(C)$$

$$= \vec{0}$$

$(4) : \iiint dm(M)\, \vec{CM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{CM})$

$$= \iiint dm(M)\, b\, \vec{u_\rho} \wedge (\Omega \vec{u_z} \wedge b \vec{u_\rho}) = \iiint dm(M)\, \Omega b^2\, \vec{u_\rho} \wedge \vec{u_\varphi} = \iiint dm(M)\, b^2 \Omega\, \vec{u_z}$$

$$= \Omega b^2 \left(\iiint dm(M)\right) \vec{u_z}$$

$$= m \Omega b^2 \vec{u_z}$$

On a donc $\vec{L_0} = m(R+b)^2 \dot{\theta}\, \vec{u_z} + \vec{0} + \vec{0} + m b^2 \Omega \vec{u_z}$

$$= \left(m \dot{\theta} (R+b)^2 + m \Omega b^2\right) \vec{u_z}$$

$$= m \dot{\theta} (R+b)(R+2b) \vec{u_z}$$

On retrouve le théorème de König : $\vec{L_0} = \vec{L^*} + m\, \vec{OC} \wedge \vec{v}(C)$

avec $\vec{L^*} = \iiint dm(M)\, \vec{CM} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$

$= m \Omega b^2$

$m \vec{OC} \wedge \vec{v}(C) = m \dot{\theta} (R+b)^2$

<u>Remarque</u> : que signifie le théorème de König pour le moment cinétique ?

Le moment cinétique est l'équivalent, pour les mouvements de rotation, de la quantité de mouvement : c'est une quantité intégrée (une seule quantité pour un système) qui exprime quelles masses sont en rotation, et à quelle vitesse.

Ici, on peut décomposer la rotation du cerceau en deux parties :

* une rotation propre du cerceau, sur lui-même. Le moment cinétique associé, $\vec{L^*}$, correspond au moment cinétique d'un cerceau identique, de centre immobile et tournant avec une vitesse angulaire Ω
* une rotation (révolution, dans le langage astronomique) du cerceau autour du cylindre. Le moment cinétique associé, $m\vec{OC} \wedge \vec{v}(C)$, correspond au moment cinétique du cerceau s'il tournait autour du cylindre avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ sans tourner sur lui-même (~~[illegible]~~ il s'agirait d'un pur mouvement de translation).

Le théorème de König sur la décomposition du moment cinétique traduit ~~la~~ cette décomposition du mouvement de rotation.

d. L'énergie cinétique du cerceau est donnée par

$$E_C = \frac{1}{2}\iiint dm(\Pi)\, v(\Pi)^2$$

$$= \frac{1}{2}\iiint dm(\Pi)\left[\left((R+b)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + b\Omega\,\vec{u_\varphi}\right)\cdot\left((R+b)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + b\Omega\,\vec{u_\varphi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\iiint dm(\Pi)\left[(R+b)^2\dot{\theta}^2 + b^2\Omega^2 + 2(R+b)\,b\,\dot{\theta}\,\Omega\,\vec{u_\varphi}\cdot\vec{u_\theta}\right]$$

L'intégrande est composée de trois termes. Les deux premiers sont indépendants de Π et leur intégration est immédiate. Le troisième ne dépend de Π que par $\vec{u_\varphi}$, donc

$$\iiint dm(\Pi)\; 2(R+b)\,b\,\dot{\theta}\,\Omega\,\vec{u_\varphi}\cdot\vec{u_\theta}$$

$$= 2(R+b)\,b\,\dot{\theta}\,\Omega\,\underbrace{\left(\iiint dm(\Pi)\,\vec{u_\varphi}\right)}_{=\vec{0}}\cdot\vec{u_\theta} = 0$$

donc $E_C = \frac{1}{2}(R+b)^2\dot{\theta}^2\iiint dm(\Pi) + \frac{1}{2}b^2\Omega^2\iiint dm(\Pi)$

$$= \frac{1}{2}m(R+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,b^2\Omega^2$$

<u>Remarques</u> :

* On retrouve ici encore le théorème de König pour l'énergie cinétique : cette dernière est partagée entre une partie liée à la rotation propre du cerceau ($\frac{1}{2}mb^2\Omega^2$) et une autre liée à la translation du cerceau autour du cylindre ($\frac{1}{2}m(R+b)^2\dot{\theta}^2$)

* comme $\Omega = \frac{R+b}{b}\dot{\theta}$, $b^2\Omega^2 = (R+b)^2\dot{\theta}^2$. Les deux énergies intervenant dans le théorème de König sont ici égales. L'énergie cinétique est, ici, équitablement répartie entre énergie cinétique de rotation propre et énergie cinétique de translation.

* $\dot{\theta}$ et Ω ne sont pas a priori constants, mais on peut néanmoins les sortir de l'intégrale car cette dernière se fait sur une "photographie" du système à un instant donné. Dans le processus d'intégration, la seule variable est Π, dont ne dépendent pas $\dot{\theta}$ et Ω.