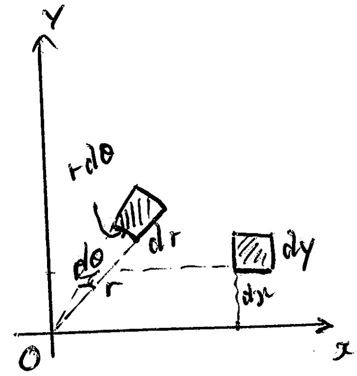
Calcul de surfaces et de volumes

I. Surface : $S = \iint_{P \in S} dS(P)$

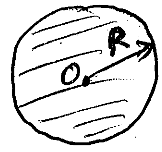


1/ Surface plane :

- en coordonnées cartésiennes : $\underline{dS = dx\,dy}$
- " polaire $\underline{dS = dr\, r\,d\theta}$

Exemple :

Surface d'un disque $dS = dr \times r d\theta$ (coordonnées polaires)



avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $r \in [0, R]$

donc $S = \iint dr\, r\,d\theta = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} R^2\, 2\pi = \underline{\pi R^2}$

2/ Surface d'une sphère : de centre O et de rayon R

en coordonnées sphériques $\underline{dS = r\,d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi}$

avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$

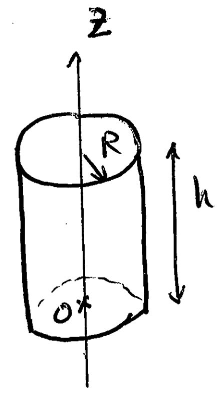
donc $S = \iint r\,d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi$ avec $r = R$

$= R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 \times 2 \times 2\pi = \underline{4\pi R^2}$

3/ Surface d'un cylindre : d'axe (Oz) et de hauteur h de rayon R

En coordonnées cylindriques $dS = r\,d\theta\, dz$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in [0, h]$



donc $S = \iint r\,d\theta\, dz = R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h} dz$

$= R\, 2\pi h$

II Volume :

$$V = \iiint_{P \in \text{Volume}} d\tau(P)$$

- en coordonnées cartésiennes : (x, y, z) $\quad$ $d\tau = dx\, dy\, dz$
- " $\quad$ cylindriques : (r, θ, z) $\quad$ $d\tau = dr\ r d\theta\ dz$
- " $\quad$ sphériques : (r, θ, φ) $\quad$ $d\tau = dr\ r d\theta\ r \sin\theta\, d\varphi$

exemple : volume d'une sphère de rayon R et centre O

en coordonnées sphériques : $\quad \theta \in [0;\pi]$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

$r \in [0, R]$

donc $$V = \iiint dr\ r d\theta\ r\sin\theta\, d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} R^3 \times 2 \times 2\pi$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^2$$